This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**Über dieses Buch**

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

**Nutzungsrichtlinien**

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

**Über Google Buchsuche**

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06633700 1

# Die Grundzüge

des

# graphiſchen Rechnens

und der

# graphiſchen Statik.

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

Von

**Karl von Ott,**

Profeſſor an der k. k. deutſchen Oberrealſchule und h. Docent für Bau-Mechanik am k. Landes-polytechnikum in Prag.

Dritte erweiterte Auflage mit 123 Holzſchnitten.

Prag, 1874.

J. G. Calve'ſche k. k. Hof- [illegible] u. Univerſitäts-Buchhandl.

(Ottomar Beyer.)

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
652365
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.
R 1913 L

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

Druck von Heinr. Mercy in Prag.

# Vorwort zur ersten Auflage.

Seit dem Erscheinen der graphischen Statik von K. Culmann*), welche die zulässige Belastung der verschiedenen Bauobjekte und deren Dimensionen auf rein graphischem Wege zu finden lehrt, sind bereits sechs Jahre verflossen und trotzdem hat dieser interessante und für den Ingenieur höchst wichtige Wissenszweig noch nicht jene Verbreitung und Anerkennung gefunden, die er in Folge seiner großen Fruchtbarkeit und praktischen Brauchbarkeit bereits hätte erlangen sollen.

Als Ursache hiervon mag zum Theil der Umstand Schuld sein, daß alles Neue — wenn es auch noch so vortrefflich ist — entweder aus Bequemlichkeitsrücksichten oder aus Unkenntniß angefeindet wird, indem sich viele, namentlich die älteren Praktiker, schwer entschließen können, von altherbekannten, wohl eingeübten Methoden zu Gunsten der neueren Richtung abzulassen.

Der raschen und allgemeinen Ausbreitung des oben genannten Werkes mag übrigens auch der Umstand hinderlich sein, daß Culmann gleich von vorneherein die Kenntniß der Geometrie der Lage fordert und zum Vorstudium seines Werkes die neuere Geometrie von Staudt anempfiehlt, die trotz ihrer Vortrefflichkeit — bei der genialen Schreibweise Staudt's — dem Anfänger auf diesem Felde große Schwierigkeiten bietet.

Um die geometrischen Hilfsmittel in der Weise anwenden zu können wie sie Culmann fordert, muß man dieselben von Grund aus kennen

*) Professor der Ingenieurwissenschaft am Eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich.

[illegible] Begri[illegible] der Linien [illegible]
[illegible] Konstruktion [illegible] geometrischen [illegible]
[illegible] graphisch [illegible] arithmetisch [illegible]

[illegible] Lehrmittel [illegible] sowie jener prak[illegible]
[illegible] Kenntnisse [illegible] möglichst [illegible]
[illegible] geometrischen Konstruktionslehre gefordert [illegible]
[illegible] der Mittelschule [illegible]
[illegible] graphische Rechner [illegible] würde.
[illegible] Augen [illegible] Interesse [illegible]
[illegible]

[illegible] Anwendung der graphischen [illegible]
[illegible] habe [illegible]
[illegible] Tendenz der [illegible]
[illegible] zu machen.

[illegible] Gebrauch machen können,
[illegible] bekannten Größen, die durch ihre
[illegible] ermitteln soll. Er
[illegible] umgehen, daß er die ge[illegible]
[illegible] mit dieser das Resultat durch
[illegible] das Rechnen während der
[illegible] man in allen Fällen, in welchen
[illegible] verlangt wird, das Rechnen durch
[illegible]

[illegible] im [illegible] 18[illegible]

Der Verfasser.

# Vorwort zur zweiten Auflage.

Die gute Aufnahme und der rasche Absatz der ersten Auflage meiner „Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik“ ermuthigen mich zur zweiten Auflage zu schreiten, die vor der ersteren den erheblichen Vorzug hat, daß sie die Anwendung der graphischen Statik zur Bestimmung der in den verschiedenen Fachwerkträgern auftretenden Kräfte enthält, und im Anhange die Elemente der Normal-, Biegungs- und Knick-Festigkeit, beziehungsweise Elastizität entwickelt. Als weiterer Vorzug dieser zweiten Auflage mag auch erwähnt werden, daß die zahlreichen Figuren in den Text aufgenommen wurden, wodurch das lästige Aufsuchen derselben in den Tafeln vermieden und eine bequemere Uebersicht geboten wird.

Auch bei der zweiten Auflage war ich bemüht, in den Erweiterungen möglichst deutlich zu sein, und habe — dem Zwecke dieses Büchleins entsprechend — nur das Wesentlichste über die praktische Anwendung des Kräfte- und Seilpolygones aufgenommen.

Die Behandlung des kontinuirlichen Trägers gehört meiner Ansicht nach bereits in das Gebiet der höheren Ingenieur-Wissenschaften; sie ist bereits ziemlich komplizirt und wurde daher um so mehr bei Seite gelassen,

als der kontinuirliche Träger viel seltener als der auf beiden Enden frei aufliegende Träger angewendet wird.

Auch die elastische Durchbiegung oder Formänderung der Träger wurde weil deren Berechnung außerhalb der Grenzen der Elementar- Wissenschaft liegt und mehr sekundärer Natur ist — außer Acht gelassen.

Schließlich erlaube ich mir jene geehrten Leser, welche sich für die [illegible] Stein- und Eisenkonstruktionen interessiren, [illegible] zu verweisen, deren beide ersten Theile bereits [illegible] und deren letzter Theil noch im Laufe dieses Jahres [illegible] wird.

[illegible], im Juli 1871.

Der Verfasser.

# Vorwort zur dritten Auflage.

In dieser Auflage wurden wieder einige Ergänzungen und Erweiterungen, soweit sie in einem Leitfaden, der bloß die Grundzüge des graphischen Rechnens und die Elemente der graphischen Statik enthalten soll, möglich sind, vorgenommen, und unter anderem auch die Konstruktion der Stützlinie in einem Gewölbe, behufs der Stabilitätsbestimmung desselben, aufgenommen, die eine sehr schöne Anwendung des Seilpolygones gestattet.

Er würde mich sehr freuen, wenn diese Auflage ebenso freundlich beurtheilt und aufgenommen würde, wie es bei den beiden ersten Auflagen der Fall, die binnen drei Jahren vollständig vergriffen wurden.

Prag, im Juni 1874.

Karl v. Ott.

# 1. Theil.

# Das graphische Rechnen.

## §. 1.

### Graphische Addition und Subtraktion.

#### I. Addition und Subtraktion von Strecken.

Die zu addirenden oder zu subtrahirenden geraden Linien, die wir kurzweg Strecken nennen wollen, müssen sich selbstverständlich nicht nur auf dieselbe Längeneinheit beziehen, sondern müssen auch Größen derselben Art vorstellen.

Jede begrenzte Strecke a b können wir uns entstanden denken durch die Bewegung eines Punktes von a nach b oder aber im umgekehrten Sinne, d. h. von b nach a. Bezeichnen wir nun die Strecke in der Richtung von a nach b, d. i. a b als positive Größe, so müssen wir jene von b nach a, d. i. b a als negative Größe in Betracht ziehen.

Die Richtung des Wachsens einer Strecke, oder wie man sagt ihren Sinn, kann man entweder durch einen eingezeichneten Pfeil ↛, oder aber dadurch ersichtlich machen, daß man den Anfangspunkt mit Null (0) bezeichnet. Zwei in derselben Geraden liegende Strecken mit entgegengesetzten Pfeilen stehen daher wie plus und minus zu einander, woraus folgt, daß die Summe von zwei gleichen, aber dem Sinne nach gerad entgegengesetzt gerichteten Strecken gleich Null ist.

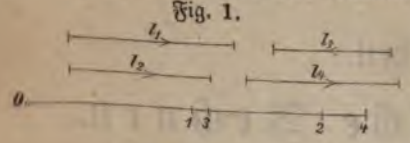
Die zu addirenden Strecken können folgende Lage haben:

1. sie können gleiche Richtung haben, oder wie man sagt parallel sein,
2. sie können verschiedene Richtung haben, aber in einer und derselben Ebene liegen und
3. sie können beliebige Richtungen im Raume besitzen.

Ad. 1. Sind die zu addirenden Strecken parallel, so wird man sie auf einer und derselben Geraden mit Rücksicht auf ihren Sinn successive

aneinander reihen. Hierbei wird man am einfachsten den Anfangspunkt der ersten Strecke mit o und die Endpunkte der aufeinander folgenden Strecken der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4 . . . . bezeichnen, so daß also 0 1 die erste, 1 2 die zweite, 2 3 die dritte, 3 4 die vierte Strecke und 0 4 die Summe dieser vier Strecken vorstellt.

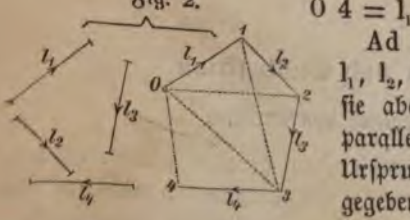
Fig. 1.




Es repräsentirt also in Fig. 1 die Strecke 0 4 die algebraische Summe der durch ihre Lage und Größe gegegebenen Strecken $l_1$, $l_2$, $l_3$ und $l_4$, d. h. es ist

$$0\,4 = l_1 + l_2 + l_3 + l_4.$$

Fig. 2.




Ad 2. Sind die zu addirenden Strecken $l_1$, $l_2$, $l_3$ und $l_4$, Fig. 2, nicht parallel, liegen sie aber alle in der Zeichnungsebene oder parallel zu ihr, so wird man, von einem Ursprunge 0 ausgehend, zu der ersten der gegebenen Strecken d. i. zu $l_1$ eine Parallele ziehen, auf ihr das Stück $0\,1 = l_1$ auftragen, sodann durch den Endpunkt 1 zu $l_2$ eine Parallele legen, von ihr das Stück $1\,2 = l_2$ abschneiden u. s. f. bis zur letzten Strecke $l_4$ fortfahren.

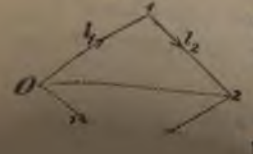
Die Schlußseite 0 4 des aus den gegebenen Strecken $l_1$, $l_2$, $l_3$, $l_4$ konstruirten Polygons stellt dann die Größe und Richtung der Summe dieser Strecken vor.

Fällt demnach der Endpunkt einer graphischen Summe mit dem Ursprung 0 zusammen, so ist diese Summe gleich Null.

Das Polygon Fig. 2 gibt übrigens nicht nur die Summe der vier Strecken $l_1$ bis $l_4$, sondern auch die Partialsummen der einzelnen Strecken; so ist z. B. 0 2 die Summe aus $l_1$ und $l_2$; 0 3 die Summe aus $l_1$, $l_2$ und $l_3$; ferner 1 3 die Summe aus $l_2$ und $l_3$ u. s. w.

Uibrigens bleibt die Summe von zwei oder mehreren Strecken unverändert, wenn man die Reihenfolge der Summanden ändert.

Fig. 3.



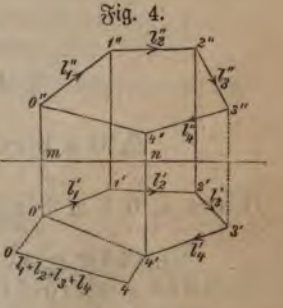

Um dies einzusehen, ergänze man in Fig. 3 das Dreieck 0 1 2, in welchem 0 2 die Summe aus $l_1$ und $l_2$ vorstellt, zu einem Parallelogramm, so wird

$$0\,2 = l_1 + l_2 = l_2 + l_1.$$

Analog läßt sich zeigen, daß die Summe von beliebig vielen Strecken von der Reihenfolge, in der die einlnen Strecken zusammengesetzt werden, unabhängig ist.

Ad 3. Haben die zu summirenden Strecken beliebige Richtungen im Raume, so sind zur Bestimmung der Lage und Größe dieser Strecken bekanntlich zwei Projektionen derselben nothwendig. Man wird sich daher die orthogonalen Projektionen der zu addirenden Strecken $l_1$, $l_2$, $l_3$ und $l_4$ auf zwei zu einander senkrechten Ebenen verschaffen und sodann nach Fig. 4 die Projektionen dieser Strecken addiren.

Fig. 4.

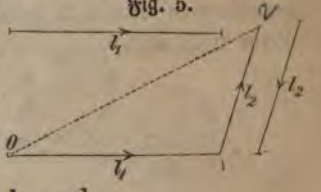



Durch die beiden Projektionen 0'' 4'' und 0' 4' der Schlußseite 0 4 des Polygons ist alsdann die Summe der gegebenen Strecken, d. i. die Gerade 0 4 des Raumes vollkommen bestimmt.

Um 0 4 in wahrer Größe zu erhalten, denke man sich diese Gerade des Raumes um eine ihrer Projektionen, z. B. um die horizontale 0' 4', in die betreffende Projektionsebene umgeklappt. Zu diesem Behufe errichtet man bekanntlich in den Endpunkten 0' und 4' auf die horizontale Projektion 0' 4' Senkrechte und trägt hierauf 0'0 = 0'' m und 4'4 = 4'' n auf, so ist 0 4 die gesuchte Größe.

Subtraktion ist Addition im entgegengesetzten Sinne; soll daher eine Strecke $l_2$ von jener $l_1$ Fig. 5 subtrahirt werden, so hat man nur die Pfeilrichtung der Strecke $l_2$ umzukehren und dann zu addiren. Demnach ist

Fig. 5.




$$0\,2 = l_1 + (-l_2) = l_1 - l_2.$$

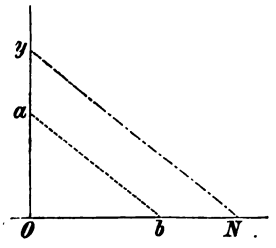
## II. Addition und Subtraktion von Verhältnissen.

Bevor wir diese Aufgabe graphisch durchführen, wollen wir zuvor zeigen, wie man das Verhältniß, oder wie man sagt den Bruch $\frac{a}{b}$ auf einen anderen willkürlich angenommenen Nenner N bringt.

Bezeichnen wir den dem angenommenen Nenner N entsprechenden unbekannten Zähler mit y, so muß die Gleichung bestehen $\frac{a}{b} = \frac{y}{N}$, oder $a : b = y : N$.

In dieser Gleichung bildet offenbar y die vierte Proportionale zu den Strecken a, b und N und kann auf mannigfaltige Weise mittelst ähnlicher Dreiecke konstruirt werden.

Fig. 6.




Man zeichne am einfachsten nach Fig. 6 ein rechtwinkliges Axenkreuz, trage vom Scheitel 0 aus auf der einen Axe die gegebenen Nenner und auf der andern Axe den gegebenen Zähler auf, verbinde a mit b und ziehe durch N die Gerade N y parallel zu a b, so ist offenbar 0 y der gesuchte Nenner; denn es ist wegen a b || N y das

$$\triangle\ 0\,a\,b \sim 0\,y\,N \text{ daher } \frac{0\,a}{0\,b} = \frac{0\,y}{0\,N}, \text{ oder weil}$$

$0\,a = a$, $0\,b = b$ und $0\,N = N$ gemacht wurde, $\frac{a}{b} = \frac{y}{N}$.

Demnach wird es leicht sein, aus mehreren gegebenen Brüchen die algebraische Summe zu bilden.

Soll z. B. die Summe aus

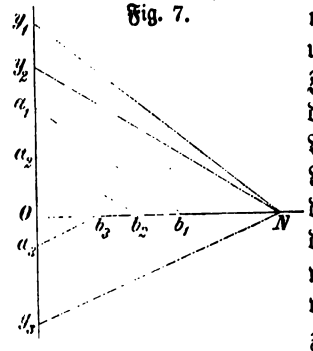
$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3}$$

konstruirt werden, so denke man sich diese Brüche auf einen willkürlich angenommenen Nenner N gebracht und bezeichne die unbekannten Zähler der Reihe nach mit $y_1$, $y_2$ und $y_3$, so wird

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3} = \frac{y_1 + y_2 - y_3}{N}.$$

Da hier positive und negative Zähler vorkommen, so trage man

Fig. 7.




nach Fig. 7 von 0 aus die positiven Zähler $a_1$ und $a_2$ nach aufwärts, somit den negativen Zähler $a_3$ nach abwärts auf, verbinde dann die Endpunkte der von 0 aus auf der anderen Axe aufgetragenen Nenner $b_1$, $b_2$ und $b_3$ der Reihe nach mit $a_1$, $a_2$ und $a_3$ und führe zu diesen Verbindungslinien durch den Endpunkt N des angenommenen Nenners 0 N Parallele, welche auf der Axe der Zähler die gesuchten von 0 aus zu messenden Zähler $y_1$, $y_2$ und $y_3$ zum gemeinschaftlichen Nenner N abschneiden.

Die algebraische Summe dieser Zähler ist nun nach dem 1. Fall des §. 1 sehr leicht zu bestimmen; bezeichnen wir diese Summe mit z, so ist

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_3}{b_3} = \frac{y_1 + y_2 - y_3}{N} = \frac{z}{N}.$$

Gibt man übrigens dem Nenner N die Länge der der ganzen Konstruktion zu Grunde liegenden Längeneinheit, macht also $N = 1$, so bestimmt dann die diesem Nenner zukommende Strecke z die algebraische Summe der gegebenen Brüche.

Nach der obigen Methode läßt sich offenbar auf sehr bequeme Weise eine Reihe von Brüchen auf einen beliebigen gemeinschaftlichen Nenner bringen.

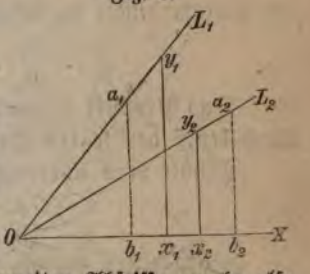
Anmerkung. Kommen unter den zu addirenden Brüchen auch ganze Zahlen vor, so behandle man dieselben wie Brüche mit dem Nenner Eins.

## §. 2.

## Graphische Multiplikation.

1. Hat man zunächst das Produkt aus zwei gegebenen Verhältnissen oder Brüchen, z. B. aus $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$ zu bilden, so trage man, nach Fig. 8 vom Anfangspunkte 0 aus, die Nenner $b_1$ und $b_2$ als Abscissen und hierzu die Zähler $a_1$ und $a_2$ als Ordinaten auf; verbinde dann die Endpunkte $a_1$ und $a_2$ mit 0 durch die Geraden $L_1$ und $L_2$, wähle nun eine **beliebige** Abscisse $0\,x_1$ und konstruire hierzu die der $L_1$ entsprechende Ordinate $y_1$; diese Ordinate wähle man zur zweiten Abscisse, mache also $0\,x_2 = y_1$, und errichte in $x_2$ die der $L_2$ entsprechende Ordinate $y_2$. Es ist dann

Fig. 8.




$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{y_2}{x_1};$$

denn es ist das $\triangle\, 0\, a_1\, b_1 \sim \triangle\, 0\, y_1\, x_1$ und $\triangle\, 0\, a_2\, b_2 \sim \triangle\, 0\, y_2\, x_2$, es müssen daher die Proportionen bestehen:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{y_1}{x_1} \text{ und } \frac{a_2}{b_2} = \frac{y_2}{x_2},$$

welche mit einander multiplicirt die Gleichung geben:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2};$$

da aber $x_2 = y_1$ gemacht wurde, so wird hierfür

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{y_2}{x_1}, \text{ w. z. b. w.}$$

Da nun $x_1$ beliebig groß gewählt werden kann, so kann man also je nach der Wahl von $x_1$, das Produkt der obigen Verhältnisse auf einen beliebigen Nenner bringen.

2. Analog dem vorigen Falle kann man das Produkt aus beliebig vielen Verhältnissen bilden; wäre z. B. das Produkt aus n Verhältnissen, nämlich aus

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3} \ldots\ldots \frac{a_n}{b_n}$$

zu konstruiren, so bilde man zunächst der Reihe nach die den gegebenen Verhältnissen entsprechenden Geraden $L_1$, $L_2$, $L_3$, . . . . . $L_n$, wähle hierauf eine beliebige Anfangsabscisse $x_1$, und bestimme dazu für $L_1$ die Ordinate $y_1$; mache nun $y_1 = x_2$ und zeichne zu $x_2$ und $L_2$ die entsprechende Ordinate $y_2$; mache wieder $y_2 = x_3$ und konstruire zu $x_3$ und $L_3$ die Ordinate $y_3$ u. s. w.

Dieses Verfahren setze man bis zur Geraden $L_n$ fort, wodurch man die Schlußordinate $y_n$ bekommt; es wird dann

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_3}{b_3} \ldots\ldots \frac{a_n}{b_n} = \frac{y_n}{x_1}.$$

**Das Produkt sämmtlicher Verhältnisse ergibt sich also als das Verhältniß der letzten Ordinate $y_n$ zu der Anfangsabscisse $x_1$.**

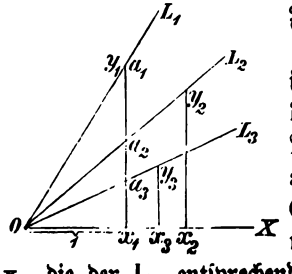
**Wählt man überdies $x_1$ gleich der Konstruktionseinheit, so wird**

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_3}{b_3} \ldots\ldots \frac{a_n}{b_n} = y_n.$$

3. Soll das Produkt aus mehreren Strecken, z. B. aus $a_1$, $a_2$ $a_3$ gebildet werden, und bezeichnet man es mit $y_3$, so wird offenbar

$$y_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = \frac{a_1}{1} \cdot \frac{a_2}{1} \cdot \frac{a_3}{1}.$$

Fig. 9.




Hiernach ergibt sich in Fig. 9 eine der Fig. 8 analoge Konstruktion.

Man mache nämlich $0\,x_1 = 1$, errichte in $x_1$ auf $0\,x_1$ eine Senkrechte und trage auf dieser von $x_1$ aus die Strecken $a_1$, $a_2$, $a_3$ auf. Nun ziehe man von 0 zu den Endpunkten $a_1$, $a_2$, $a_3$ die Strahlen $L_1$, $L_2$, $L_3$, wähle zu $0\,x_1 = 1$ als Abscisse die Strecke $a_1$ als Ordinate von $L_1$, mache $x_2' = y_1$ und bestimme zu $x_2$ die der $L_2$ entsprechende Ordinate $y_2$, endlich mache man $x_3 = y_3$ und errichte in $x_3$ die zu $L_3$ gehörige Ordinate $y_3$.

Es ist dann, wie leicht einzusehen ist,

$$y_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3.$$

Analog läßt sich das Produkt $y_n$ von beliebig vielen Strecken oder Zahlen $a_1, a_2, a_3 \ldots . a_n$ konstruiren.

Zusatz. Um die Multiplikation zweier Verhältnisse $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$ zu vereinfachen, setze man

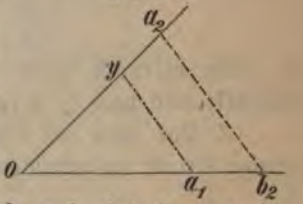
$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{y}{b_1},$$

woraus sich, wenn man die Gleichung mit $b_1$ multiplicirt und durch $a_1$ dividirt, die Proporzion ergibt:

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{y}{a_1}, \text{ oder } a_2 : b_2 = y : a_1.$$

In dieser Proportion stellt offenbar y die vierte Proportionale zu den drei Gliedern $a_2$, $b_2$ und $a_1$ vor, und läßt sich entweder nach Fig. 6, oder noch allgemeiner nach der nebenstehenden Fig. 10 konstruiren. Hiernach trage man vom Scheitel 0 eines beliebigen Winkels auf dem einen Schenkel $a_2$ und auf dem andern $b_2$ und $a_1$ auf, verbinde dann $a_2$ mit $b_2$ und ziehe durch $a_1$ die Parallele $a_1$ y zu $a_2$ $b_2$, so wird durch diese der Endpunkt von y bestimmt.

Fig. 10.




Um ferner auf einfachste Art eine Strecke a mit einem Verhältnisse $\frac{b}{c}$ zu multipliciren, so setze man

$$a \cdot \frac{b}{c} = y, \text{ oder } \frac{b}{c} = \frac{y}{a},$$

und hat sonach wieder zu b, c und a die vierte Proportionale zu konstruiren.

Auch das Produkt zweier Strecken a und b, nämlich $a \cdot b = y$, läßt sich am einfachsten nach $\frac{a}{1} = \frac{y}{b}$ als vierte Proportionale zu den Strecken a, 1 und b darstellen.

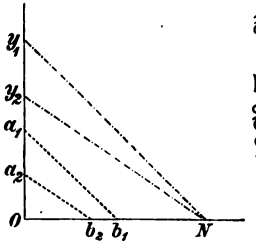
## §. 3.

## Graphiſche Diviſion.

1. Hat man den Quotienten zweier Verhältniſſe

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$$

Fig. 11.




zu konſtruiren, d. h. durch das Verhältniß zweier Strecken auszudrücken, ſo bringe man beide Verhältniſſe, nach der bereits erläuterten Weiſe, in Fig. 11, auf einen beliebigen gemeinſchaftlichen Nenner N und hat alsdann

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{y_1}{N} : \frac{y_2}{N} = \frac{y_1}{y_2}.$$

**Da übrigens die Diviſion als Umkehrung der Multiplikation aufzufaſſen iſt, indem**

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1} \times \frac{b_2}{a_2},$$

**ſo kann hiernach ſofort die Diviſion in eine Multiplikation verwandelt und nach §. 2. aufgelöſt werden.**

2. Hat man den Quotienten zweier Strecken a und b durch eine einzige Strecke auszudrücken, d. h. aus der Gleichung

$$a : b = y$$

y zu beſtimmen, ſo bedenke man, daß auch

$$\frac{a}{b} = \frac{y}{1},$$

ſomit y die vierte Proportionale zu den Strecken a, b und 1 vorſtellt und nach §. 2. dargeſtellt werden kann.

## §. 4.

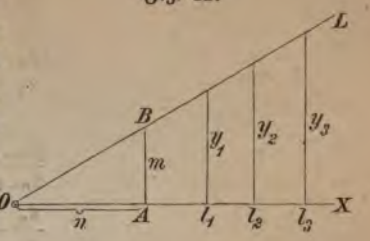
## Kombinirte Multiplikation und Diviſion.

1. Hat man mehrere Strecken $l_1$, $l_2$, $l_3$ . . . . mit demſelben konſtanten Verhältniſſe $\frac{m}{n}$ zu multipliziren und ſetzt man

$$l_1 \cdot \frac{m}{n} = y_1 \; ; \; l_2 \cdot \frac{m}{n} = y_2, \; l_3 \cdot \frac{m}{n} = y_3 \ldots,$$

so läßt sich die Bestimmung der Unbekannten nach Fig. 12 vornehmen. Man trägt nämlich auf einer Geraden OX die Strecke OA = n auf, macht AB = m und zieht durch B die Gerade OL; dann schneidet man stets von O aus auf OX die Strecken $l_1, l_2, l_3 \ldots$ ab und führt durch die Endpunkte dieser Strecken Parallele zu A B.

Fig. 12.




Die Segmente dieser Parallelen zwischen O X und O L geben der Reihe nach die gesuchten Größen $y_1, y_2, y_3 \ldots$

Die Richtigkeit der Konstruktion ist aus der Aehnlichkeit der entstandenen Dreiecke leicht nachzuweisen.

2. Sind mehrere Strecken $l_1, l_2, l_3 \ldots$ durch dasselbe konstante Verhältniß $\frac{m}{n}$ zu dividiren, so kann man diese Aufgabe offenbar nach der vorigen Nummer lösen, wenn man die gegebenen Strecken $l_1, l_2, l_3 \ldots$ mit dem umgekehrten Verhältnisse, also mit $\frac{n}{m}$ multiplizirt.

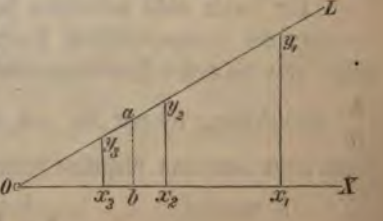
## §. 5.

## Graphisches Potenziren und Radiziren.

1. Soll die nte Potenz eines Verhältnisses $\frac{a}{b}$ gebildet werden, so wird man dieses Verhältniß nach §. 2 nmal mit sich selbst multipliziren.

Man wird daher nach Fig. 13 die dem Verhältnisse $\frac{a}{b}$ entsprechende Gerade L durch den Anfangspunkt O des Axenkreuzes legen, dann zu einer beliebigen Abscisse $x_1$ die der L zugehörige Ordinate $y_1$ bestimmen, diese Ordinate $y_1 = x_2$ machen, zu $x_2$ die entsprechende Ordinate $y_2$ suchen, $y_2$ wieder zur Abscisse $x_2$ wählen, zu $x_3$ die Ordinate $y_3$ konstruiren u. s. f. dieses Verfahren nmal wiederholen; es wird dann

Fig. 13.



$$\left.\begin{aligned} \frac{y_1}{x_1} &= \frac{a}{b} \\ \frac{y_2}{x_2} &= \frac{a}{b} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} &= \frac{a}{b} \\ \frac{x_n}{y_n} &= \frac{a}{b} \end{aligned}\right\}$$

Durch Multiplikation aller dieser Gleichungen mit einander ergibt sich

$$\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} \cdots \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} \cdot \frac{y_n}{x_n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,$$

und weil bei der Konstruktion

$$x_2 = y_1\,;\; x_3 = y_2 \ldots x_n = y_{n-1},$$

so wird

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{y_n}{x_1}.$$

Nach Fig. 13 ist also $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{y_3}{x_1}$.

Wählt man die Anfangsabscisse $x_1 = 1$, so wird $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = y_2$ und allgemein $\left(\frac{a}{b}\right)^n = y_n$.

Bezüglich der praktischen Ausführung der Zeichnung sind folgende Bemerkungen beachtenswerth.

Ist das Verhältniß $\frac{a}{b} > 1$, so werden die Ordinaten stets größer als die zugehörigen Abscissen und zwar nimmt das Wachsthum der Ordinaten um so rascher zu, je größer a im Verhältniß zu b ist.

Um daher nicht befürchten zu müssen, daß die Konstruktion über die [illegible] der Zeichnungsfläche hinausfalle, so ist es bei großen Verhältnissen Potenzexponenten zweckmäßig, das gegebene Verhältniß [illegible] sodann die nte Potenz von dem echten Bruche $\frac{b}{a}$ zu [illegible] Resultat schließlich wieder umzukehren.

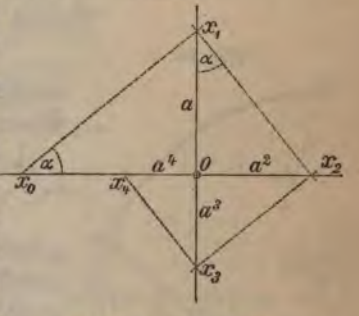
$$\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{y_n}{x_1},$$

$$\text{so ist } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{x_1}{y_n}.$$

Wenn aber $\frac{a}{b} < 1$ ist, so arbeitet man dann gegen den Ursprung O hin und wird somit die Anfangsabscisse $x_1$ so groß anzunehmen haben, daß die letzte Ordinate $y_n$ noch hinreichend deutlich und gut meßbar erscheint. Will man in diesem Falle $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ als Dezimalbruch erhalten, so wird man offenbar $x_1 = 10$ wählen.

2. Hat man eine gegebene Strecke a zu potenziren, z. B. $y_3 = a^3$ zu konstruiren, so kann dies — wenn man berücksichtigt, daß $a^3 = \left(\frac{a}{1}\right)^3$ ist — analog der vorigen Aufgabe geschehen; man denke sich nämlich in Fig. 13, O b und $O x_1 = 1$ gemacht, so ist $y_3 = a^3$.

Fig. 14.




Die Potenzen einer Strecke a lassen sich übrigens am einfachsten nach der Fig. 14 konstruiren.

Man zeichne ein rechtwinkliges Axenkreuz, mache $0x_0 = 1$ und $0x_1 = a$, verbinde $x_0$ mit $x_1$, errichte in $x_1$ auf $x_0 x_1$ die Senkrechte $x_1 x_2$, in $x_2$ auf $x_1 x_2$ die Senkrechte $x_2 x_3$ u. s. f., so ist $0x_2 = a^2$, $0x_3 = a^3$, $0x_4 = a^4$ u. s. w.

Um zunächst zu beweisen, daß $0x_2 = a^2$, berücksichtige man, daß das $\triangle\ 0x_0x_1 \sim 0x_1x_2$,

$$\text{daher } 0x_0 : 0x_1 = 0x_1 : 0x_2 \text{ d. i.}$$
$$1 : a = a : 0x_2,$$

woraus $0x_2 = a^2$.

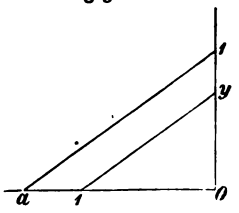
Analog ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $0x_1x_2$ und $0x_2x_3$, daß $0x_3 = a^3$, ferner aus $\triangle\ 0x_2x_3 \sim 0x_3x_4$, daß $0x_4 = a^4$ u. s. f.

Die Figur 14 stellt den Fall vor, in welchem $a < 1$ ist, die aufeinander folgenden Potenzen werden daher immer kleiner und die Konstruktion nähert sich daher immer mehr und mehr dem Ursprunge O.

Ist aber $a > 1$, so wird man für hohe Potenzexponenten mit der Konstruktion bald an die Grenze der Zeichnungsfläche kommen; man kann nun in diesem Falle die Potenzen von $\frac{1}{a}$ bilden und dann vom Resultate

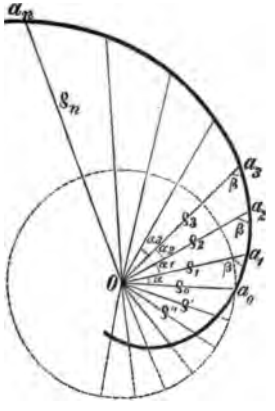
wieder den reziproken Werth nehmen. Der reziproke Werth einer Strecke a d. i. $\frac{1}{a} = y$ oder $\frac{1}{a} = \frac{y}{1}$ läßt sich aber auf die bekannte Weise sehr leicht nach Fig. 15 aus der vorliegenden Proportion konstruiren.

Fig. 15.




3. Potenziren mittelst der logarithmischen Spirale. Die allgemeinste Konstruktion der Potenzen von Strecken oder Verhältnissen läßt sich mit Zuhilfenahme der logarithmischen Spirale bewerkstelligen und wird deren Konstruktion aus Folgendem klar werden.

Fig .16.




Reiht man nach Fig. 16 um einen Punkt 0 möglichst viele ähnliche Dreiecke in demselben Sinne so aneinander, daß

1. deren bei 0 liegenden Winkel $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ . . . einander gleich sind und daß

2. jede durch den gemeinschaftlichen Scheitel 0 gehende Seite zwei Dreiecken gemeinsam ist, so entsteht, wenn die Winkel $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ . . . . unendlich klein werden, aus dem Polygon $a_0\ a_1\ a_2\ a_3$ . . . eine Kurve, welche unter dem Namen logarithmische Spirale bekannt ist und die Eigenschaft hat, daß deren aufeinander folgende Leitstrahlen $\varrho_0\ \varrho_1\ \varrho_2$ . . . . eine geometrische Progression bilden, wenn die von ihnen eingeschlossenen, aufeinander folgenden Winkel gleich sind.

Um dies einzusehen, berücksichtige man, daß wegen der Aehnlichkeit der aneinander gereihten Dreiecke die Verhältnisse

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{\varrho_3}{\varrho_2} \ldots\ldots = \frac{\varrho_n}{\varrho_{n-1}} = c,$$

also konstant sind, und daß somit

$$\varrho_0 = 1 \cdot \varrho_0,\ \varrho_1 = c \cdot \varrho_0,\ \varrho_2 = c \cdot \varrho_1 = c^2 \cdot \varrho_0,$$
$$\varrho_3 = c^3 \cdot \varrho_0, \ldots\ldots \text{und } \varrho_n = c_n \cdot \varrho_0,$$

$$\ldots \varrho_n = 1 : c : c^2 : c_3 \ldots\ldots : c^n,$$

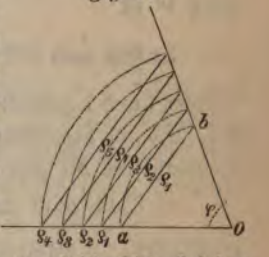
d. h die aufeinanderfolgenden Leitstrahlen bilden demnach wirklich eine geometrische Progression, deren Exponent $c = \frac{\varrho_1}{\varrho_0}$ ist.

Macht man nun überdies $\varrho_0 = 1$, so wird $c = \varrho_1$, daher

$$\varrho_1 = \varrho_1,\ \varrho_2 = \varrho_1^{\,2},\ \varrho_3 = \varrho_1^{\,3} \ldots\ldots\ldots \varrho = \varrho_1^{\,n}.$$

Die Konstruktion der logarithmischen Spirale kann man leicht mittelst des Proportionalwinkels nach dem angenommenen Verhältnisse $\frac{0\,a_1}{0\,a_0}$ oder $\frac{\varrho_1}{\varrho_0}$ vornehmen.

Fig. 17.



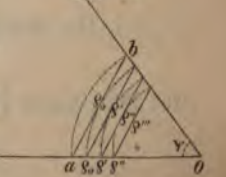

Man beschreibe nämlich mit $\varrho_0$ aus 0 Fig. 17 einen Kreisbogen, trage auf demselben von a den Leitstrahl $\varrho_1 = a\,b$ als Sehne auf und verbinde b mit 0, wodurch man den Proportionalwinkel $\varphi$ erhält. Durchschneidet man nun von 0 aus mit dem Radius $\varrho_1$ die Schenkel dieses Winkels, so gibt die Verbindungslinie der erhaltenen Durchschnittspunkte den folgenden Leitstrahl $\varrho_2$.

Mit $\varrho_2$ als Radius durchschneide man wieder von 0 die Schenkel des Proportionalwinkels, so gibt die zugehörige Sehne den Leitstrahl $\varrho_3$ u. s. f.

Trägt man nun diese Leitstrahlen $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots$ nach Fig. 16 der Reihe nach auf den aufeinanderfolgenden Schenkeln der unter einander gleichen, aber möglichst kleinen Winkeln $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ auf und verbindet die erhaltenen Punkte $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$ durch eine kontinuirliche Linie, so gibt diese ein Stück der gesuchten Spirale.

Um aber auch Punkte dieser Kurve unterhalb $0\,a_0 = \varrho_0$ zu erhalten, wird man, wenn die nach $\varrho_0$ folgenden kleineren Leitstrahlen der Reihe nach mit $\varrho'$, $\varrho''$, $\varrho'''$ .... bezeichnet werden, die Längen derselben wieder mit dem entsprechenden Proportionalwinkel $\varphi$ konstruiren.

Fig. 18.




Man beschreibe nämlich mit $\varrho_1$ aus 0, Fig. 18 einen Kreisbogen, trage auf demselben von a aus den Leitstrahl $\varrho_0 = a\,b$ als Sehne auf, und verbinde b mit 0, wodurch der Proportionalwinkel $\varphi$ entsteht.

Durchschneidet man nun von 0 aus mit $\varrho_0$ die Schenkel dieses Winkels, so gibt die zugehörige Sehne den Leitstrahl $\varrho'$; mit $\varrho'$ durchschneide man wieder von 0 aus die Schenkel von $\varphi$, so gibt die zugehörige Sehne den Leitstrahl $\varrho''$ u. s. w.

Um nun mit Hilfe dieser mit möglichster Genauigkeit und hinreichend großer Ausdehnung konstruirten Spirale zu potenziren oder zu radiziren, wird man wie folgt verfahren.

a) Hat man zunächst eine Strecke 1 zur nten Potenz zu erheben, also $1^n$ zu konstruiren, wobei n eine ganze positive Zahl sein soll, so durchschneide man von 0 aus die Spirale mit den Radien 1 und 1, verbinde die erhaltenen Durchschnittspunkte 1 und 1 mit 0 und trage den von diesen Verbindungslinien gebildeten Winkel $\alpha$ um 0 1 auf derselben Seite, wo 0 1 liegt, nmal im Kreise herum, worauf der zu n $\alpha$ gehörige Leitstrahl gleich $1^n$ ist.

b) Hat man $1^{-n}$ oder $\frac{1}{1_n}$ zu bestimmen, so muß man den von den Leitstrahlen 1 und 1 gebildeten Winkel $\alpha$ um 0 1 auf der entgegengesetzten Seite von 0 1, also im negativen Sinne, nmal auftragen und den zu $-n\alpha$ gehörigen Leitstrahl als die gesuchte Potenz ansehen.

c) Soll man die nte Wurzel aus einer Strecke 1 ziehen, d. h. $\sqrt[n]{1}$ oder $\frac{1}{1^n}$ konstruiren, so wird man — da dies ein Potenziren mit gebrochenem Exponenten ist — wieder den zu den Leitstrahlen 0 1 und 0 1 von der Länge 1 und 1 gehörigen Winkel $\alpha$ bestimmen, $\alpha$ in n gleiche Theile theilen und denjenigen Leitstrahl, welcher zu dem zunächst 01 gelegenen Theilungspunkte gehört, als die gesuchte $\sqrt[n]{1}$ betrachten.

d) Soll $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ oder $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ konstruirt werden, so bilde man zunächst nach Fig. 6 für 0 N = 1 die Strecke $y = \frac{a}{b}$ und verfahre dann mit $y^n$ oder $\sqrt[n]{y}$ wie oben. *)

e) Um die Konstruktion von $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$ oder $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$ vorzunehmen, bilde man zuerst $\left(\frac{a}{b}\right)^m = y^m = x$ und sodann die $\sqrt[n]{x}$.

---

*) Die Konstruktion des Quotienten y aus $\frac{a}{b}$ mittelst der logarithmischen Spirale ist im folgenden Zusatze gegeben.

Zusatz. Bezieht man die logarithmische Spirale auf Polarkoordinaten, wobei man am einfachsten den Leitstrahl O a Fig. 16, dessen Länge gleich der Maßstabseinheit ist, als feste Polaraxe und den Punkt O als fixen Pol annimmt, so wird für einen beliebigen Leitstrahl $\varrho$, der mit O a den Polar- oder Drehungswinkel w einschließt, nach den Lehren der analytischen Geometrie die Gleichung bestehen

$$\varrho = b^w,$$

wobei b die Basis des gewählten Logarithmensystems bezeichnet. Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$w = \log. \varrho.$$

Hiernach sind also die Logarithmen der Leitstrahlen den Polarwinkeln gleich, welche diese Leitstrahlen mit der festen Polaraxe o a bilden und man kann daher diese Spirale, wenn man sie bis zu der erforderlichen Grenze entwickelt, die Stelle von Logarithmentafeln vertreten lassen und somit mit ihr außer dem bereits vorgeführten Potenziren und Radiziren auch noch die graphische Multiplikation und Division vornehmen.

Bezeichnet man nämlich die zu multiplizirenden oder zu dividirenden Strecken mit

$$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots\ldots \varrho_n,$$

die diesen Strecken als Leitstrahlen entsprechenden Polarwinkel mit

$$w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots w_n,$$

ferner das gesuchte Resultat mit y und den dem y als Leitstrahl zugehörigen Polarwinkel mit $\sigma$, so hat man, um zunächst das Produkt

$$y = \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3 \ldots\ldots \varrho_n \text{ zu bilden,}$$

$$\log. y = \log. (\varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3 \ldots \varrho_n) = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n = \sigma.$$

Zeichnet man daher von O aus an die Polaraxe O a die Winkelsumme $\sigma$, so ist der dem Winkel $\sigma$ entsprechende Leitstrahl y das gesuchte Produkt.

Hat man nun den Quotienten aus den Strecken $\varrho_1$ und $\varrho_2$ zu bilden, also $y = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ zu konstruiren, so

beachte man, daß

$$\log. y = \log. \varrho_1 - \log. \varrho_2 = w_1 - w_2 = \sigma.$$

Man wird daher wieder den Winkel $\sigma$ an die Polaraxe von O aus übertragen, worauf der diesem Winkel zugehörige Leitstrahl den gesuchten Quotienten y gibt.

Bei dem Übertragen des Winkels σ an die Polaraxe 0 a muß auch jetzt stets beachten, ob das gesuchte Resultat, nämlich y, größer oder kleiner ist als die Konstruktionseinheit 0 a. Im ersteren Falle wird man parallel den Winkel σ steigend, also so auftragen, daß der gesuchte Strahl y größer werde als 0 a, in letzterem Falle dagegen dem Winkel die entgegengesetzte Lage bezüglich der festen Axe 0 a geben.

Soll das Produkt aus mehreren Verhältnissen gebildet, also

$$y = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{\varrho_3}{\varrho_4} \cdot \frac{\varrho_5}{\varrho_6} \cdot \ldots\ldots$$

konstruirt werden, so suche man die den einzelnen Verhältnissen

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2}, \quad \frac{\varrho_3}{\varrho_4}, \quad \frac{\varrho_5}{\varrho_6} \ldots\ldots$$

entsprechenden Polarwinkel $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ ...., summire diese Winkel, so liefert der zu dieser Winkelsumme konstruirte Leitstrahl das verlangte Produkt y.

Hiemit haben wir nun gezeigt, daß sich mit Zuhilfenahme einer logarithmischen Spirale das graphische Multipliziren, Dividiren, Potenziren und Wurzelziehen auf sehr einfache Weise vornehmen läßt, daß somit die logarithmische Spirale beim graphischen Rechnen dieselben Dienste leistet, wie die Logarithmentafeln beim gewöhnlichen Zifferrechnen.

Schließlich mögen hier noch einige spezielle Fälle des graphischen Wurzelziehens, die ohne die Benützung der logarithmischen Spirale auf einfache Weise bewerkstelligt werden können, vorgeführt werden.

1. Soll zunächst $y = \sqrt{a}$ bestimmt werden, so läßt sich dies leicht graphisch durchführen, wenn man bedenkt, daß y die mittlere geometrische Proportionale aus a und 1 bildet; es ergibt sich nämlich durch Quadrirung der obigen Gleichung die folgende

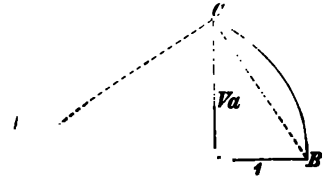
$$y^2 = a \text{ oder } y^2 = 1 \cdot a,$$

woraus die Proportion resultirt

$$1 : y = y : a,$$

die sich auf manigfache Weise graphisch auflösen läßt.

Fig. 19.




Die Fig. 19 gibt eine der gebräuchlichsten Auflösungen.

Hiernach mache man 0 A = a und A B = 1, schlage über 0 B einen Halbkreis und errichte in A eine Senkrechte auf 0 A, so schneidet diese den Halbkreis in C und es ist A C = $\sqrt{a}$.

Die Richtigkeit der Konstruktion ergibt sich offenbar aus dem bekannten Lehrsatze der Geometrie, welcher lautet:

Fällt man im rechtwinkligen Dreiecke (0 B C Fig. 19) aus dem Scheitel (C) des rechten Winkels auf die Hypothenuse (0 B) eine Senkrechte, so ist diese Senkrechte (C A) die mittlere Proportionale zwischen den Segmenten (0 A und A B) der Hypothenuse.

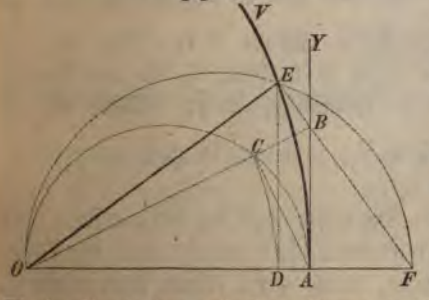
Hiernach wird man auch ganz einfach $y = \sqrt{a \cdot b}$ konstruiren können, indem man, nach Fig. 19, 0 A = a und A B = b macht, über 0 B einen Halbkreis beschreibt und in A auf 0 B die Senkrechte A C errichtet, welche das gesuchte y gibt.

2) Um die Ausdrücke $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $y = \sqrt{a^2 - b^2}$ zu konstruiren, berücksichtige man, daß nach dem Pythagoräischen Lehrsatze x durch die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes bestimmt ist, dessen Katheten a und b sind, und daß y durch die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes fixirt wird, in welchem a die Hypothenuse und b die andere Kathete vorstellt.

Wären aber die Werthe der Ausdrücke $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ und $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ graphisch zu bilden, so denke man sich zunächst $a^2 + b^2 = h^2$ gesetzt, suche also die Hypothenuse h zu den beiden Katheten a und b und konstruire dann nach Obigem $\sqrt{h^2 + c^2}$ und $\sqrt{h^2 - c^2}$.

Man versuche nun noch die Werthe der Ausdrücke $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ und $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}$ graphisch darzustellen.

Fig. 20.




3. Zum Ausziehen der dritten Wurzel kann man nach Fig. 20 eine spezielle Kurve A V konstruiren.

Man mache 0 A = 1, beschreibe über 0 A einen Halbkreis, errichte in A auf 0 A die Senkrechte A Y, ziehe 0 B beliebig, mache nun 0 C = 0 D, D E ∥ A B und 0 B = 0 E, so ist der Schnittpunkt E ein Punkt der gesuchten Kurve A V.

Um dies einzusehen, errichte man E F ⊥ 0 E, so wird bekanntlich $\overline{0\,E}^2 = 0\,D \cdot 0\,F$, weil nun 0 C . 0 B = 1

$\triangle$ 0 A B $\sim$ 0 A C, also $\frac{0A}{0B} = \frac{0C}{0A}$, oder $\frac{1}{0B} = \frac{0C}{1}$, woraus wirklich 0 B . 0 C = 1), so ist auch 0 D . 0 E = 1 oder $0D = \frac{1}{0E}$.

Es wird daher $\overline{0E}^2 = \frac{1}{0E} \cdot 0F$ oder $0E^2 = 0F$ das ist $0E = \sqrt[3]{0F}$.

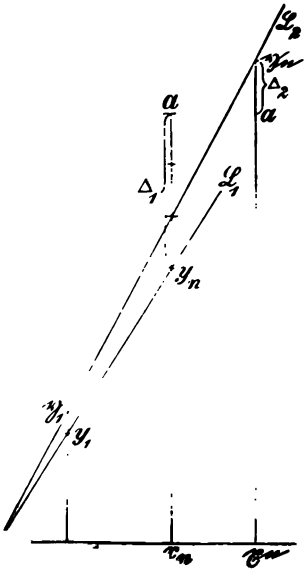
Analog wie den Punkt E wird man behufs der Vervollständigung der Kurve A V eine hinreichende Menge von Kurvenpunkten konstruiren.

Um nun aus einer Strecke l die dritte Wurzel zu ziehen, trage man sie von 0 aus auf 0 A auf, so daß z. B. 0 F = l wird, beschreibe über 0 F als Durchmesser einen Halbkreis, so ist der zum Durchschnittspunkte E dieses Kreises mit A V von 0 aus gezogene Strahl

$$0E = \sqrt[3]{0F} = \sqrt[3]{l}.$$

Ist $l < 1$, so bestimme man $x = \sqrt[3]{\frac{1}{l}}$, so wird $\sqrt[3]{l} = \frac{1}{x}$.

Fig. 21.




4. Um approximativ die nte Wurzel aus einer Strecke a graphisch zu bilden, kann man folgenden Weg einschlagen. Man nehme für $\sqrt[n]{a}$ einen beiläufigen Näherungswerth $y_1$ an, konstruire nun die dem Verhältnisse $\frac{y_1}{1}$ entsprechende Gerade 0 $L_1$, Fig. 21, und bilde (nach §. 5, Fall 2) die nte Potenz von $y_1$ nämlich $y_1 = y_n$. Wäre wirklich $\sqrt[n]{a} = y_1$, so müßte offenbar $a = y_1^n = y$ sein.

Da dieser Fall im Allgemeinen nicht eintreten wird, so konstruire man die Differenz $\Delta_1 = a - y_n$, indem man a auf $y_n$ von dessen Fußpunkte aufträgt. Diese Differenz theile man in n gleiche Theile und ziehe durch den ersten neben 0 $L_1$ liegenden Theilstrich die Gerade 0 L.

Betrachtet man nun $y_1$ (nämlich die der Abscisse 1 entsprechende Ordinate von $0\,L_2$) als den Werth von $\sqrt[n]{a}$, so müßte $y_1{}^n = a$ sein. Man bilde also $y_1{}^n = y_n$ und untersuche ob $y_n = a$. Wenn dies der Fall, so wäre $y_1$ das gesuchte Resultat.

Ist aber die Differenz zwischen a und $y_n$, nämlich $\triangle_2$ noch zu erheblich um vernachlässigt zu werden, so theile man wieder $\triangle_2$ in n gleiche Theile, führe durch den ersten neben $0\,L_2$ liegenden Theilstrich die Gerade $0\,L_3$ und betrachte die der Abscisse 1 entsprechende Ordinate dieser Geraden als den verbesserten Werth von $\sqrt[n]{a}$.

Auf diese Weise fahre man fort bis die Differenz $\triangle$ verschwindend klein wird.

Zusatz. Ist eine Wurzel aus einer großen Zahl graphisch zu ziehen, z. B. die 3te Wurzel aus 2592, so zerlege man diese Zahl in zwei Faktoren, von denen der eine eine vollständige 3te Potenz und der andere so klein ist, daß seine graphische Länge mit dem Zirkel abgefaßt werden kann. Nun ziehe man aus jedem Faktor die 3te Wurzel und bilde das Produkt der erhaltenen Wurzeln.

Im vorliegenden Falle ist

$$2592 = 12^3 \times 1,5,$$

also

$$\sqrt[3]{2592} = \sqrt[3]{12^3} \times \sqrt[3]{1,5} = 12\sqrt[3]{1,5}.$$

Konstruirt man nun $\sqrt[3]{1,5}$, nach einer der erläuterten Methoden, so hat man die erhaltene Länge 12mal zu nehmen, um das verlangte Resultat zu erhalten.

## §. 6.

## Graphische Flächenverwandlung und Flächenbestimmung.

1. Das Dreieck. Da der Flächeninhalt eines Dreieckes bekanntlich gleich ist dem halben Produkte aus der Grundlinie b in die Höhe h, so ist es klar, daß durch die Verschiebung der Spitze des Dreieckes parallel zur Grundlinie der Flächeninhalt desselben nicht geändert wird.

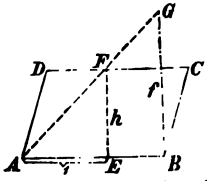
Fig. 22.

Um nun den Flächeninhalt f eines Dreieckes A B C, Fig. 22, graphisch zu bestimmen, d. i. die Gleichung $f = \frac{b \cdot h}{2}$ oder die P

$2 : b = h : f$ zu konstruiren, errichte man im Punkte A auf die Basis $A B = b$ eine Senkrechte, trage auf ihr $A E = 2$ Einheiten auf, ziehe $C F \parallel B E$, und fälle das Höhenloth C D, so ist $D F = f$. Denn es ist wegen $C F \parallel B E$ das $\triangle A B E \sim C D F$ und daher $2 : b = h : D F$, woraus wirklich $D F = \frac{b \cdot h}{2} = f$.

2. Das Viereck. Beim Vierecke haben wir 2 Fälle zu unterscheiden: es ist nämlich der Flächeninhalt wie beim Parallelogramm direkt, oder wie beim unregelmäßigen Viereck durch Verwandlung in ein gleich großes Dreieck bestimmbar.

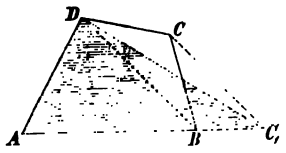
Fig. 23.




a) Flächenbestimmung des Parallelogramms. Bezeichnet man dessen Basis A B, Fig. 23, mit b und die Höhe E F mit h, so läßt sich der Flächeninhalt des Parallelogramms, nämlich $f = b \cdot h$ sehr leicht nach §. 2 graphisch bestimmen. Man mache nämlich $A E = 1$, errichte in E auf A B die Senkrechte $E F = h$, ziehe A F und $B G \parallel E F$, so ist die Strecke $B G = f$; denn es verhält sich wegen $B G \parallel E F$, $1 : h = b : B G$, woraus $B G = b \cdot h = F$.

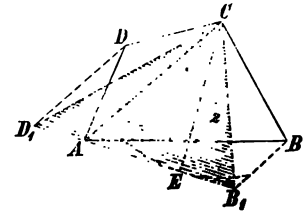
b) Flächenbestimmung des unregelmäßigen Vierecks.

Fig. 24.




1. Methode. Man verwandle das Viereck A B C D, Fig. 24, in das gleich große Dreieck, A D $C_1$ und bestimme dann auf die bekannte Weise die Fläche des Dreieckes. Die angezeigte Flächenverwandlung geschieht am einfachsten durch Elimination einer Ecke, z. B. jener C. Man führt diesfalls durch C zur Diagonale B D die Parallele $C C_1$ und ersetzt nun das $\triangle B C D$ durch das gleich große $B C_1 D$, so ist offenbar $A B C D = A C_1 D$.

Fig. 25.




2. Methode. Das Viereck A B C D, Fig. 25, kann sehr leicht in ein gleich großes Dreieck $B_1 C D_1$ von der Höhe 2 verwandelt werden und es stellt dann offenbar seine Basis $B_1 D_1$ die Fläche des Vierecks vor.

Behufs dieser Flächenverwandlung beschreibe man aus einem der Eckpunkte, z. B. aus C mit dem Radius $C E = 2$ einen Kreis-

bogen, führe an denselben von dem dem Punkte C gegenüberliegenden Eckpunkte A eine Tangente und ziehe dann durch die beiden andern Ecken B und D zur Diagonale A C Parallele, so schneiden diese von der genannten Tangente die Strecke $B_1 D_1 = f$, d. i. gleich dem gesuchten Flächeninhalte ab.

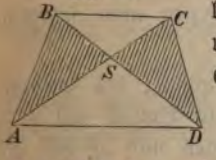
Durch die Diagonale A C wird nämlich das Viereck in die beiden Dreiecke A B C und A C D zerlegt; und ist

$$\triangle A B C = \triangle A B_1 C \text{ und}$$
$$\triangle A C D = \triangle A C D_1, \text{ daher}$$
$$\triangle A B_1 C + \triangle A C D_1 = \triangle B_1 C D_1 = f.$$

Es ist aber $f = B_1 D_1 \cdot \frac{C E}{2}$ und wegen $C E = 2$, wirklich $f = B_1 D_1$.

Anmerkung. Bevor wir zum Polygone übergehen, wollen wir noch auf eine besondere Eigenschaft des Trapezes aufmerksam machen, welche bei der Verwandlung der Polygone in Dreiecke, oder beim Ausgleichen eines gebrochenen Linienzuges durch eine Gerade gute Dienste leistet.

Fig. 26.




Zieht man im Trapeze A B C D, Fig. 26, die beiden Diagonalen, so sind die zwischen den Diagonalen und den nicht parallelen Trapezseiten liegenden Dreiecke A B S und C D S einander gleich; denn es ist

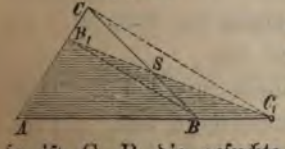
$$\triangle A B C = \triangle B D C \text{ und}$$
$$\triangle B C S = \triangle B C S,$$

es wird daher auch

$$\triangle A B C - \triangle B C S = \triangle B D C - \triangle B C S, \text{ d. i.}$$
$$\triangle A B S = \triangle C D S, \text{ w. z. b. w.}$$

Hiernach läßt sich leicht die folgende Aufgabe auflösen:

Fig. 27.




Man soll von dem Punkte $C_1$ in der Dreiecksseite A B des $\triangle$ A B C, Fig. 27, die Gerade $C_1 B_1$ so ziehen, daß sie mit den Dreiecksseiten denselben Inhalt begrenzt wie die Seite B C.

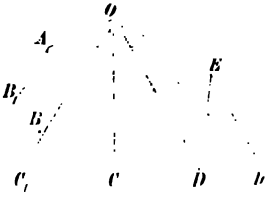
Man verbinde $C_1$ mit C, mache $BB_1 \parallel CC_1$, so ist $C_1 B_1$ die gesuchte Seite, durch welche $\triangle A B_1 C_1 = A B C$; denn durch $C_1 B_1$ wird einerseits vom $\triangle$ A B C das $\triangle B_1 C S$ weggenommen, und andererseits das ihm gleiche B $C_1$ S hinzugegeben. Man nennt deshalb die Gerade $C_1 B_1$ die Ausgleichsgerade zu B C.

### 3. Flächeninhalt von Polygonen.

Behufs der Flächenbestimmung von Polygonen verwandelt man dieselben am einfachsten in Dreiecke von gleichem Inhalte.

Dies kann auf verschiedene Art geschehen.

Fig. 28.



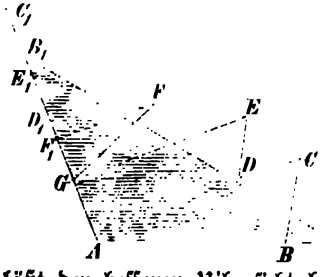

a) Die Verwandlung soll von einem bestimmten Eckpunkte, z. B. von jenem O, Fig. 28, erfolgen.

Man ziehe von O die Diagonale O B zu dem nächsten Eckpunkte B, lege parallel dazu eine Gerade durch die Zwischenecke A und verlängere die dritte Seite C B bis zum Schnitt $B_1$ mit der genannten Parallelen, verbinde O mit $B_1$, so ist hiedurch die Ecke A eliminirt und das Fünfeck O $B_1$ C D E inhaltsgleich mit dem ursprünglichen Sechsecke.

Man ziehe nun O C und durch $B_1$ die $B_1$ $C_1$ ∥ O C, so wird durch O $C_1$ die Ecke $B_1$ eliminirt und es ist dann das Viereck O $C_1$ D E gleich dem ursprünglichen Sechseck. Endlich eliminire man durch E $D_1$ ∥ O D die Ecke E und erhält schließlich das Dreieck O $C_1$ $D_1$ inhaltsgleich dem ursprünglichen Sechsecke.

Die Hilfslinien werden bei komplizirten Polygonen nicht gezogen, sondern nur deren Schnittpunkte markirt.

Fig. 29




b) Die Verwandlung des Siebeneckes, Fig. 29, in ein Dreieck soll vom Punkte O aus erfolgen und es soll die Ecke A beibehalten werden, d. h. mit anderen Worten: es soll der Linienzug B C D E F G durch eine von O ausgehende Ausgleichsgerade ersetzt werden.

Man beginnt die Elimination der Ecken von G bezüglich der Seite A G und läßt der besseren Uibersicht halber die Hilfslinien weg.

1) G ausgeschieden und $F_1$ dem F substituirt durch F $F_1$ ∥ G E,
2) $F_1$ ausgeschieden und $E_1$ dem E substituirt durch E $E_1$ ∥ $F_1$ D,
3) $E_1$ ausgeschieden und $D_1$ dem D substituirt durch D $D_1$ ∥ C $C_1$,
4) $D_1$ ausgeschieden und $C_1$ dem C substituirt durch C $C_1$ ∥ B $D_1$,

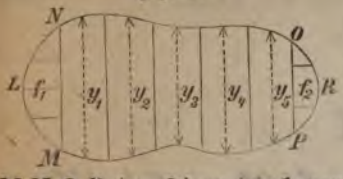
ndlich

ausgeschieden und $B_1$ dem B substituirt durch B $B_1$ ∥ O $C_1$,

gibt also $O B_1$ als die gesuchte Ausgleichsgerade, durch welche das Siebeneck A B C . . . G in das inhaltsgleiche Dreieck A $B_1$ O verwandelt wird.

Von dieser Ausgleichsmethode wird häufig in der praktischen Geometrie Gebrauch gemacht

Fig. 30




4. Flächenbestimmung einer beliebigen unregelmäßigen Figur. Ist der Flächeninhalt einer unregelmäßigen Figur, z. B. jener von der Form Fig. 30 zu ermitteln, so geschieht dies am einfachsten, wenn man den Hauptkörper M N O P der Figur durch parallele Ordinaten in Trapeze von konstanter Breite b zerlegt, deren Inhalt man offenbar findet, wenn man die Summe ihrer mittleren Ordinaten $y_1$, $y_2$, $y_3$ . . . mit der konstanten Breite b multiplizirt.

Sind die Endflächen L M N = $f_1$ und O P R = $f_2$ ebenfalls unregelmäßig, so sind deren Flächeninhalte aus der in Fig. 30 angedeuteten Zerlegung in Trapeze und Dreiecke zu ermitteln, so daß dann die Fläche F der ganzen Figur aus der Gleichung

$$F = f_1 + f_2 + (y_1 + y_2 + y_3 + \ldots . y_n)\, b$$

bestimmt werden kann.

Bei dieser Zerlegung der unregelmäßigen Fläche in Trapeze und Dreiecke wird man offenbar die Breite dieser Flächenelemente desto kleiner zu wählen haben, je genauer die Flächenbestimmung vorgenommen werden soll.

Zur Uibung mögen noch folgende Aufgaben graphisch aufgelöst werden.

1. Man verwandle ein Rechteck, dessen Seiten a und b sind, in ein Quadrat; d. h. konstruire die Gleichung $x^2 = a \cdot b$ oder $x = \sqrt{a \cdot b}$.

2. Man verwandle ein Dreieck, dessen Basis b und dessen Höhe h gegeben sind, in ein Quadrat; konstruire also $x = \sqrt{b \cdot \frac{h}{2}}$.

3. Man konstruire ein Quadrat, dessen Fläche gleich ist der Summe mehrerer Quadrate; bestimme also $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}$

4. Man konstruire die Seite eines Quadrates, dessen Fläche gleich ist der Differenz zweier Quadrate; d. h. bilde $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

5. Man verwandle einen Kreis in ein gleich großes Quadrat; konstruire also $x^2 = \frac{d^2}{4} \cdot \frac{22}{7}$ oder $x = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{22}{7}}$.

6. Man konstruire die Seite eines Würfels, dessen Inhalt gleich ist dem eines rechtwinkligen Parallelpipeds mit den Kanten a, b, c; bilde also $x^3 = a \cdot b \cdot c$ oder $x = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$.

---

# 2. Theil.

# Die Elemente der graphischen Statik.

## I. Abschnitt.

### Wirkung der äußeren Kräfte.

Wir wollen im Nachfolgenden behufs der Entwicklung der Gleichgewichtsbedingungen der auf einen Körper wirkenden Kräfte aus der Statik nur den Satz vom Parallelogramm der Kräfte voraussetzen, nach welchem auf bekannte Weise die Resultirende oder Mittelkraft von zwei gleichartigen auf einen Punkt wirkenden Kräften bestimmt wird, oder nach welchem eine Kraft in ihre der Richtung nach gegebenen Komponenten zerlegt werden kann.

§. 7.

### Zusammensetzung der Kräfte.

I. Wirken mehrere gleichartige Kräfte in einer und derselben Geraden auf einen beweglichen Punkt, so wird man deren Mittelkraft offenbar nach dem 1. Falle der graphischen Addition von Strecken zu bestimmen haben.

Soll sich aber der Punkt im Gleichgewichte befinden, so muß natürlich die Mittelkraft Null sein, woraus folgt, daß für den Gleichgewichtszustand die Kräfte zum Theile entgegengesetzte Richtung haben müssen.

…en mehrere gleichartige Kräfte $P_1$, $P_2$ … $P_n$ in verschie… …auf einen beweglichen Punkt O, so kann man bekanntlich …en, wenn man zunächst die Resultirende $r_1$ aus den … und $P_2$ nach dem Parallelogramm dieser Kräfte … $r_1$ mit der dritten Kraft $P_3$ zur Resultirenden

$r_2$ zusammensetzt, ferner $r_2$ analog mit $P_4$ vereinigt und so fortfährt, bis man alle einzelnen Kräfte zusammengesetzt hat.

Da jedoch jedes Parallelogramm durch zwei von einer Ecke desselben ausgehende Seiten vollkommen bestimmt ist, so wird man die Zusammensetzung der Kräfte am einfachsten nach dem 2. Falle der graphischen Addition von Strecken vornehmen können; hieraus ergibt sich die folgende Konstruktionsregel:

**Wirken mehrere Kräfte in verschiedenen Richtungen auf einen Punkt, so wird ihre Mittelkraft gefunden, indem man die einzelnen Kräfte ihrer Richtung und Größe nach Ende an Ende reiht; die Verbindungslinie des Anfangspunktes mit dem Endpunkte des so erhaltenen Linienzuges gibt die gesuchte Mittelkraft der Richtung und Größe nach.**

Fig. 31.

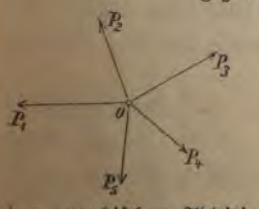
Sind z. B. die in dem Punkte 0 angreifenden Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$ und $P_4$ Fig. 31 zusammenzusetzen, so mache man A B = und || $P_2$, ebenso B C = und || $P_3$, endlich C D = und || $P_4$, so ist 0 D die gesuchte Mittelkraft R.

Der Punkt 0 müßte sich nun in der Richtung 0 D in Bewegung setzen; wollte man aber das Gleichgewicht herbeiführen, so müßte noch eine Kraft $P_5$ hinzugefügt werden, welche dem R gleich aber entgegengesetzt gerichtet ist, die also der Größe und Richtung nach durch D 0 bestimmt wäre.

Sollen sich demnach mehrere auf einen Punkt 0 wirkende Kräfte $P_1$, $P_2$ .... im Gleichgewichte befinden, so muß offenbar ihre Resultirende R Null sein; daraus folgt der Satz:

**Wenn beliebig viele auf einen Punkt wirkende Kräfte im Gleichgewichte sind, so lassen sich die Kräfte zu einem geschlossenen Polygone, dem sogenannten Kräftepolygone an einander reihen.**

Fig. 32.




Hiernach sind also die in Fig. 32 auf den Punkt 0 wirkenden Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_5$ im Gleichgewichte.

Die Reihenfolge der Aneinanderreihung der einzelnen Kräfte ist dabei, wie bereits bei der graphischen Addition gezeigt wurde, gleichgiltig.

III) Wenn sich die auf einen festen Körper wirkenden, in einer und derselben Ebene, der sogenannten Kraftebene, liegenden gleichartigen Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$ ... nicht in einem einzigen Punkte schneiden, so denke man sich den Körper durch ein System von geradlinigen festen Gebilden ersetzt, welche von einer Kraft zur andern gehend ein Polygon bilden, dessen einzelne Seiten im Stande sein müssen, den in ihnen durch die äußeren Kräfte hervorgebrachten Zug- oder Druckkräften zu widerstehen. Dieses den festen Körper stellvertretende Polygon wird, wenn die Seiten desselben Zugspannungen erleiden, Seilpolygon, dagegen wenn sie gepreßt werden, Druck- oder Stützlinie genannt. Im Allgemeinen kann man es Gelenkpolygon nennen. Die Endpunkte desselben heißen Knoten und die in den Polygonseiten durch die äußern Kräfte hervorgerufenen Kräfte werden die innern Kräfte, speziell auch Seilspannungen genannt.

Um zu erkennen, ob Zug oder Druck in einer Polygonseite herrscht, zerlegt man die in den beiden Endpunkten derselben thätigen äußeren Kräfte in Richtungen, die mit dieser und der sich unmittelbar anschließenden Polygonseite zusammenfallen. Sind dann die Richtungspfeile der beiden mit der fraglichen Polygonseite zusammenfallenden Komponenten der äußeren Kräfte von den Endpunkten weg gewendet, also wie in Fig. 33 nach außen gerichtet, so herrscht offenbar in der betreffenden Polygonseite Zug; sind dagegen diese Richtungspfeile gegen die Endpunkte, also wie in Fig. 34, nach innen gerichtet, so erleidet die Polygonseite Druck.

Fig. 33.

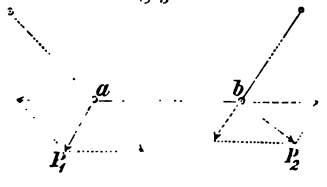
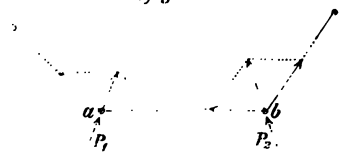



Fig. 34.




Da ferner die inneren Kräfte den äußeren gerade entgegengesetzt wirken, so folgt hieraus zur Charakteristik der inneren Kräfte der Satz: Zeichnet man zu dem von einem Knotenpunkte a einer Polygonseite ab auslaufenden Richtungspfeil der inneren Kraft am andern Knotenpunkte b dieser Polygonseite einen Pfeil in entgegengesetzter Richtung, so bedeutet

für die inneren Kräfte { die Zusammenstellung $\overset{a}{\longleftarrow}\quad\overset{b}{\longrightarrow}$ Druckspannung,
" " $\overset{a}{\longrightarrow}\quad\overset{b}{\longleftarrow}$ Zugspannung;

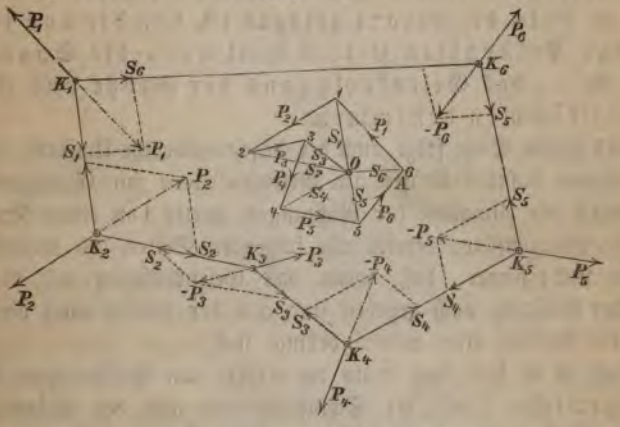
die äußeren Kräfte die umgekehrte Pfeilzusammen-

Es wird nun unsere Aufgabe sein, die Gleichgewichtsbedingungen der an dem Gelenkpolygone wirkenden Kräfte zu bestimmen.

## Gleichgewicht der Kräfte am Gelenkpolygone.

Soll das Gelenkpolygon $k_1$, $k_2$, $k_3$ . . . Fig. 35 unter dem Einflusse der auf dasselbe wirkenden äußeren Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$ . . . im Gleichgewichte stehen, so müssen die Seiten desselben so gelegen sein, daß jede in einem Knotenpunkte angreifende äußere Kraft im Gleichgewichte ist mit den beiden innern Kräften jener Polygonseiten, welche in demselben Knotenpunkte angreifen.

Fig. 35.




Bezeichnen wir die Spannungen der einzelnen Polygonseiten der Reihe nach mit $S_1$, $S_2$, $S_3$ . . ., so lassen sich demnach für den Gleichgewichtszustand die in dem Knotenpunkte $K_1$ angreifenden drei Kräfte $P_1$, $S_1$ und $S_6$ zu einem Dreiecke 0 1 6 zusammensetzen. Ebenso lassen sich die drei in $K_2$ angreifenden und im Gleichgewichte stehenden Kräfte $P_2$, $S_1$ und $S_2$ zu einem Dreiecke 0 1 2 zusammensetzen, welches mit dem vorigen die Seite 0 1 = $S_1$ gemein hat. Analog müssen sich für den Gleichgewichtszustand des Knotenpunktes $K_3$ die drei auf ihn wirkenden Kräfte $P_3$, $S_2$ und $S_3$ zu einem Dreiecke 0 2 3 vereinigen lassen, welches mit dem vorigen die Seite 0 2 gemein hat u. s. f. Wir ersehen hieraus, daß für den Gleichgewichtszustand der am Gelenkpolygone wirkenden

die aufeinander folgenden Kräftedreiecke je eine Seite gemein haben müssen, woraus sich der Satz ergibt:

Wenn die Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$ ... am Gelenkpolygone im Gleichgewichte sind, so lassen sich dieselben zu einem geschlossenen Kräftepolygon 1 2 3 ... zusammensetzen und die durch die Ecken 1, 2, 3 ... dieses Polygons zu den Seiten $S_1$, $S_2$, $S_3$ ... des Gelenkpolygons geführten Parallelen schneiden sich in einem und demselben Punkte O, dem sogenannten Pole, der derart gelegen ist, daß die von ihm ausgehenden Polstrahlen O 1, O 2, O 3 ... die Spannungen $S_1$, $S_2$, $S_3$ ... des Gelenkpolygons der Größe und Richtung nach vollkommen bestimmen.

Aus diesem Satze folgt auch der beachtenswerthe Umstand, daß, wenn die gegebenen äußeren Kräfte am Gelenkpolygone im Gleichgewichte sein sollen, durch die Annahme der Richtungen zweier von einem Knoten ausgehender Polygonseiten bereits alle folgenden Seiten des Gelenkpolygons bestimmt sind; ferner, daß, wenn das Gelenkpolygon und die äußeren Kräfte der Richtung nach gegeben sind, aus der Größe einer dieser Kräfte bereits die Größen aller andern bedingt sind.

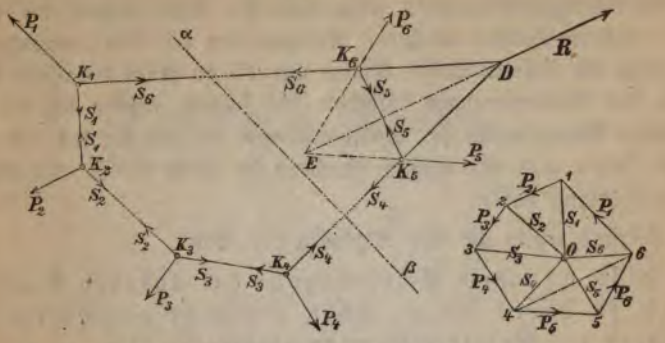
Auch ist es klar, daß wenn die Kräfte am Seilpolygone nicht im Gleichgewichte sind, die Schlußseite des aus den äußeren Kräften gebildeten Linienzuges die Resultirende dieser Kräfte bestimmt.

Das Zusammensetzen der Kräfte am Gelenkpolygone erfolgt somit nach denselben Regeln wie für den Fall, daß die Kräfte alle an einem Punkte angreifen.

Aus der Betrachtung der Fig. 35 erkennt man sogleich, daß alle Polygonseiten Zugspannungen erleiden, daß also das Gelenkpolygon ein Seilpolygon bildet.

Zusatz. Denkt man sich in einem Gelenkpolygone, Fig. 36, zwei der Polygonseiten, z. B. jene $K_1 K_6$ und $K_4 K_5$ durchschnitten, so müssen offenbar, damit der Gleichgewichtszustand ungestört bleibe, an den Schnittpunkten beiderseits Kräfte angebracht werden, welche den in den durch-
olygonseiten herrschenden Spannungen $S_6$ und $S_4$ der Richnach gleich sind. Hiernach ist sofort ersichtlich, daß die
nun zu äußeren Kräften gewordenen Seilspannungen
oder rechts von der Schnittfläche $\alpha\ \beta$ am Polygon
en das Gleichgewicht hält. Die Richtung und Größe
nale 4 6 des Kräftepolygons bestimmt, denn

Fig. 36.




s muß für den Gleichgewichtszustand nach Obigem die Mittelkraft R mit den Kräften $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ oder mit jenen $P_5$, $P_6$ ein geschlossenes Polygon bilden. Uibrigens gibt offenbar auch der Durchschnittspunkt D der Verlängerungen der beiden durchschnittenen Polygonseiten einen Punkt von R. Demnach stellt hier also R einerseits die Mittelkraft der Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$ und $P_4$ und anderseits die der Kräfte $P_5$ und $P_6$ vor.

Hieraus folgt allgemein:

Die Mittelkraft R aller zwischen zwei Seiten des Seilpolygons angreifenden äußeren Kräften geht durch den Durchschnittspunkt D der Verlängerungen dieser Polygonseiten und die Richtung und Größe von R ist durch das Kräftepolygon bestimmt.

Dieser Satz spielt in der gesammten Statik eine bedeutende Rolle und gestattet auch die Zerlegung der Kräfte mittelst des Seil- und Kräftepolygons. Soll z. B. die Kraft R in zwei andere Kräfte $P_5$ und $P_6$ von gegebenen Richtungen zerlegt werden, so trage man die letzteren im Kräftepolygone ein, verlängere im Seilpolygone die zu zerlegende Kraft R nach rückwärts und führe durch einen Punkt E derselben $E K_5$ und $E K_6$ parallel zu den Seiten 4 5 und 5 6 des Kräftepolygones; trägt man dann von $K_5$ die $P_5$ ∥ 4 5 und von $K_6$ die $P_6$ ∥ 5 6 auf, so ersetzen offenbar die Kräfte $P_5$ und $P_6$ jene R.

IV. Sind die am Seilpolygone wirkenden äußeren Kräfte parallel, so müssen sie, damit Gleichgewicht stattfinden könne, zum Theil nach entgegengesetzten Richtungen wirken, wobei offenbar die Summe der nach der einen Richtung wirkenden Kräfte gleich sein muß der Summe der nach der entgegengesetzten Richtung wirkenden Kräfte. Das Kr[illegible]ygon

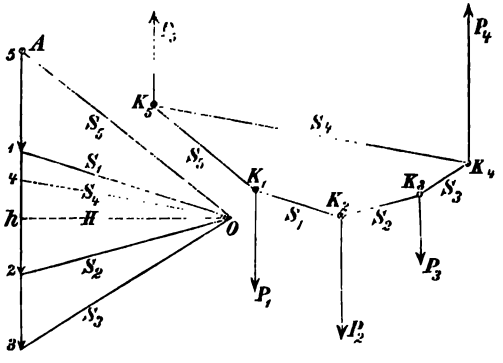
geht dann in eine Gerade über. In diesem Falle müssen überdies für den Gleichgewichtszustand jeder Ecke des Seilpolygons die senkrecht zu den äußeren Kräften wirkenden Komponenten der Seilspannungen gleich sein; denn die äußeren Kräfte können nur die zu ihnen parallelen Komponenten der Seilspannungen aufheben und folglich müssen sich die darauf senkrechten Komponenten der Seilspannungen an und für sich das Gleichgewicht halten, was nur möglich ist, wenn sie gleiche Größe und entgegengesetzte Richtung haben.

Hieraus ergibt sich also allgemein der Satz:

Sind an einem Seilpolygone die äußeren Kräfte parallel, so haben die zu ihnen senkrecht gerichteten Komponenten der Seilspannungen gleiche Größe.

Wirken die äußeren Kräfte lothrecht, so nennt man dann die konstanten horizontalen Komponenten der Seilspannungen allgemein die Horizontalspannung.

Fig. 37.




Die Figur 37 gibt ein deutliches Bild von dem den parallelen Kräften $P_1$, $P_2$ . . $P_5$ für den Gleichgewichtszustand entsprechenden Seil- und Kräftepolygone. Die wechselseitigen Beziehungen zwischen Seil- und Kräftepolygon sind hierbei dieselben wie in Fig. 36, so daß der vorliegende Fall gleichsam nur eine spezielle Aufgabe des III. Falles bildet.

Die Horizontalspannung ist in Fig 37 offenbar durch den normalen Abstand O h des Poles von der Kraftlinie d. i. durch die sogenannte Poldistanz bestimmt.

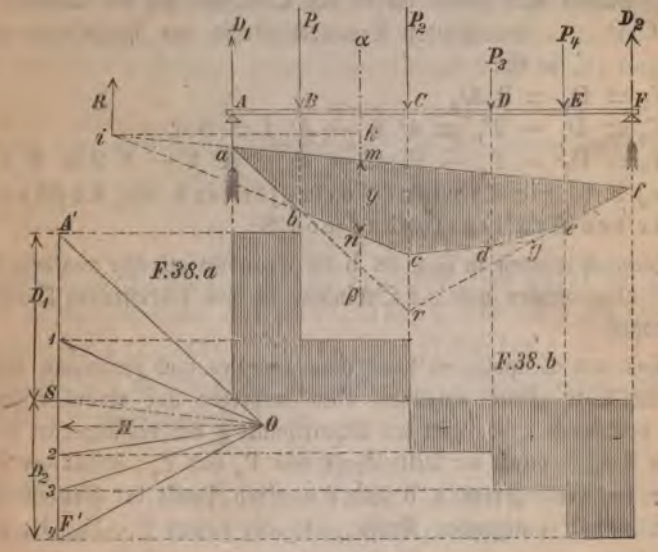
Wir wollen nun zur Anwendung der hiermit gewonnenen Resultate schreiten und sie zunächst auf den in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fall der parallelen Kräfte beschränken.

# Wirkung paralleler Kräfte auf einfache Träger mit gerader Längenaxe.

## §. 8.

### I. Bestimmung der Transversalkräfte.

Fig. 38.




Wirken auf einen Träger mit gerader Axe A F, Fig. 38, der auf zwei Stützen ruht, beliebig viele Lasten $P_1$, $P_2$, $P_3$ ... und will man zunächst die Stützendrücke $D_1$ und $D_2$ und sodann die in den einzelnen Querschnitten des Trägers thätigen Vertikal- oder Transversalkräfte bestimmen, so kann dies sowohl durch Rechnung als auch durch Konstruktion geschehen.

Da jedoch die Auflösung dieser Aufgabe durch Rechnung als bekannt vorausgesetzt werden kann, so wollen wir das vorliegende Problem nur auf graphischem Wege, der überdies der einfachere ist, auflösen.

Man trage die gegebenen Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ behufs der Bildung des geradlinigen Kräftepolygons der Reihe nach auf einer Geraden A' 4 auf (Fig. 38 a) und ziehe von einem beliebigen außerhalb A' 4 gewählten Pole 0 die Strahlen 0 A', 0 1, 0 2, 0 3, 0 4. Darauf bilde

man das zugehörige Seilpolygon a b c . . . f, indem man a b || A' 0 bis zum Lothe der Kraft $P_1$ zieht, dann b c || 1 0 bis zum Loth von $P_2$, c d || 2 0 u. s. f.

Schließt man jetzt das Seilpolygon durch die Gerade f a und zieht durch den Pol 0 den Strahl 0 S || f a, so muß — nach dem IV. Fall des vorigen §. — für den Gleichgewichtszustand offenbar $D_1 = A' S$ und $D_2 = S_4$.

Bezeichnet man ferner die in den Querschnitten der Strecken A B, B C, C D . . . . herrschenden Transversalkräfte der Reihe nach mit $V_1$, $V_2$, $V_3$ . . . ., so ist:

$V_1 = D_1 = S A'$,

$V_2 = D_1 - P_1 = A' S - A' 1 = S 1$,

$V_3 = D_1 - P_1 - P_2 = A' S - A' 1 - 1 2 = S 2$,

u. s. w., d. h. die Transversalkräfte sind die Abstände der Punkte des Kräftepolygons von S.

Hiernach wurden in Fig. 38 b die Transversalkräfte aus dem Kräftepolygon abgenommen und als Ordinaten in dem betreffenden Querschnitte aufgetragen.

Aus dem Seilpolygone kann man überdies nach Früherem sehr leicht die Mittelkraft zweier einzelnen oder mehrerer auf einander folgenden Kräfte bestimmen. So gibt der Schnittpunkt g der verlängerten c d und f e den Angriffspunkt der Mittelkraft von $P_3$ und $P_4$; ferner der Schnittpunkt r der verlängerten a b und f e einen Punkt der Mittelkraft aller zwischen a und f liegenden Kräfte, also der Lasten $P_1$, $P_2$, $P_3$ und $P_4$ und so fort.

### II. Bestimmung der Angriffs- oder statischen Momente der äußeren Kräfte.

Da die Dimensionen der Querschnitte des Trägers insbesondere von den auf diese Querschnitte wirkenden statischen Momenten der äußeren Kräfte abhängig sind, so ist die Bestimmung dieser Momente für die Baupraxis von größter Wichtigkeit.

Unter dem statischen oder Angriffsmoment M der äußeren Kräfte in
auf einen beliebigen Querschnitt $\alpha\ \beta$ (Fig. 38) des Trägers ver-
an hierbei bekanntlich das Produkt aus der Mittelkraft R aller
r einen oder der andern Seite des Querschnittes $\alpha\ \beta$ thätigen
em senkrechten Abstande $l$ der R von $\alpha\ \beta$. Im vorliegenden
für die Schnittfläche $\alpha\beta$ $R = D_1 - P_1 = S 1$ und

ihr Angriffspunkt liegt im Punkt i, in welchem sich die durch $\alpha$ $\beta$ durchschnittenen Polygonseiten treffen.

Fällt man also von i auf $\alpha$ $\beta$ die Senkrechte i k, so ist diese gleich $l$ und somit das Kraftmoment für $\alpha$ $\beta$ bestimmt durch

$$M = R \,.\, l = S\,1 \,.\, i\,k.$$

Dieses Produkt läßt sich aber sehr leicht graphisch ermitteln. Bestimmt man nämlich im Kräftepolygone die konstante Horizontalspannung H und berücksichtigt, daß das Dreieck 0 S 1 jenem i m n ähnlich ist und daß H und $k$ die bezüglichen Höhen dieser Dreiecke vorstellen, so verhält sich

$$S\,1 : H = m\,n : k$$

oder wenn man m n mit y bezeichnet und für S 1 seinen Werth R setzt,

$$R : H = y : l,$$

woraus

$$M = R \,.\, k = H \,.\, y.$$

Das Kraftmoment M für einen Querschnitt ist sonach direkt proportional der vertikalen Ordinate y des Seilpolygons in dem betreffenden Querschnitte.

Wählt man überdies die konstante Horizontalspannung oder Poldistanz **H als Krafteinheit,** so ist

$$M = y,$$

es lassen sich also in diesem Falle die Kraftmomente durch die vertikalen Ordinaten des Seilpolygones direkt darstellen.

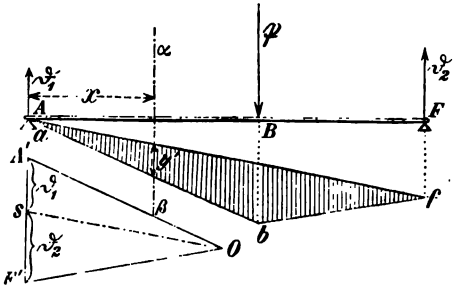
Ein Blick auf das Seilpolygon lehrt uns auch, daß die größten Momente auf jene Querschnitte wirken, welche durch die äußeren Kräfte geführt werden.

Diese höchst beachtenswerthen Eigenschaften des Seilpolygones empfehlen den Gebrauch desselben zur Lösung der vorliegenden Aufgabe auf das Beste und führen offenbar viel rascher und übersichtlicher zum Ziele als dies durch Rechnung möglich ist. Selbstverständlich gelten diese für die Transversalkräfte und Momente vertikaler Kräfte abgeleiteten Relationen ebenso für parallele Kräfte überhaupt, nur wird man statt der Bezeichnung „vertikale Richtung" überall das Wort „Kraftrichtung" oder statt „vertikale Ordinaten" die Worte „die der Kraftrichtung parallelen Ordinaten" zu gebrauchen haben.

## §. 9.

. **Einfluß von beweglichen Einzellasten auf die Tran versalkräfte und Momente.** Da sich die Wirkungen paralle Kräfte einfach addiren, so kann man jede zu den 4 Kräften $P_1$, $P_2$, und $P_4$ Fig. 38 innerhalb der Grenzen A F hinzutretende Kraft $\mathfrak{P}$ l züglich ihrer Wirkung auf den fraglichen Querschnitt $\alpha\ \beta$ für sich unt suchen und das hiefür gewonnene Resultat zu dem früher gefunden addiren.

Fig. 39.




Führt man daher, mit B behaltung derselben Poldistanz die Konstruktionen in Fig. für die auf A F wirkende Last genau so aus, wie in Fig. 3 so würden sich z. B. die auf und F in Fig. 38 thätig Stützendrücke $D_1$ und $D_2$ du das Hinzutreten von $\mathfrak{P}$, bez hungsweise um $\mathfrak{D}_1 = A' S$ u $\mathfrak{D}_2 = F' S$, Fig. 39, und die im Querschnitte $\alpha\ \beta$, Fig. 38, liegen Momenten-Ordinate y um y', Fig. 39, vergrößern.

Um aber zunächst den Einfluß einer beweglichen Einzellast $\mathfrak{P}$ c die Transversalkraft V im Querschnitte $\alpha\ \beta$, Fig. 39, der von A um absteht, kennen zu lernen, betrachten wir folgende 2 Fälle.

a) Liegt $\mathfrak{P}$ **rechts** vom Querschnitte $\alpha\ \beta$, so ist die in $\alpha\ \beta$ tl tige Transversalkraft $V = \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{P}_1 \cdot \frac{B F}{A F}$. *)

Nehmen wir die **aufwärts** gerichteten Kräfte als **positiv** so ist also in diesem Falle V **positiv** und wird offenbar um so größ **je größer B C wird, d. h. je näher die bewegliche Last $\mathfrak{P}$ zu dem Qu schnitte $\alpha\ \beta$ rückt.**

---

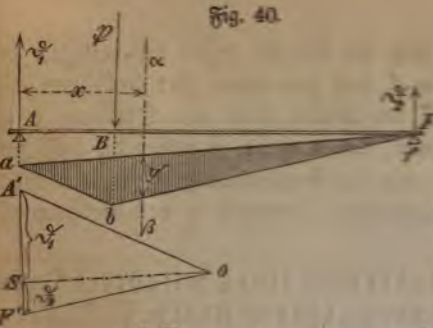
*) Gleichgewichtszustand gegen Drehung muß nämlich, wenn wir t F als Drehpunkt wählen, die Gleichung bestehen:

$$\mathfrak{D}_1 \cdot A F = \mathfrak{P} \cdot B F,$$

hen,

$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{P} \cdot \frac{B F}{A F}.$$

Fig. 40.




b) Liegt aber $\mathfrak{P}$ wie in Fig. 40, links von $\alpha\,\beta$, so ist dann die in $\alpha\,\beta$ schädige Transversalkraft $V = D_1 - \mathfrak{P}$, oder weil

$$D_1 = \mathfrak{P} \cdot \frac{BF}{AF}, \text{ so wird}$$

$$V = \mathfrak{P}\left(\frac{BF}{AF} - 1\right) = -\mathfrak{P}\left(\frac{AF - FB}{AF}\right), \text{ d. i.}$$

$$V = -\mathfrak{P} \cdot \frac{AB}{AF}.$$

In diesem Falle wird also die Transversalkraft negativ und wieder numerisch umso größer, je näher $\mathfrak{P}$ zum Querschnitte $\alpha\,\beta$ rückt.

Aus den beiden Untersuchungen folgt:

Jede Einzellast erzeugt eine positive oder negative Transversalkraft, je nachdem sie auf der rechten oder linken Seite des fraglichen Querschnittes liegt, und es ist diese Transversalkraft um so größer, je näher die Last dem Querschnitte liegt.

Denken wir uns nun den Träger durch ein System von Einzellasten, wie z. B. bei Eisenbahnbrücken durch einen Wagenzug in Anspruch genommen, so wird durch den Druck jeder rechts von dem fraglichen Querschnitte $\alpha\,\beta$ befindlichen Radaxe in $\alpha\,\beta$ eine positive, dagegen durch jede links von $\alpha\,\beta$ liegende Radaxe in $\alpha\,\beta$ eine negative Transversalkraft hervorgerufen; sollen daher im Querschnitte $\alpha\,\beta$ durch den Wagenzug nur positive Transversalkräfte erzeugt werden, so muß derselbe offenbar von rechts kommen und darf nur bis zu $\alpha\,\beta$ auffahren. Würde dagegen der Zug von links kommen und den Querschnitt $\alpha\,\beta$ nicht überschreiten, so würden durch die Drücke der einzelnen Radaxen in $\alpha\,\beta$ nur negative Transversalkräfte erzeugt werden.

Hiernach ist es klar, daß in einem beliebigen Querschnitte eines Brückenträgers der größte numerische Werth der Transversalkraft erreicht wird, wenn der Wagenzug von der entfernteren Stütze kommend bis zum Querschnitte auffährt, so daß das erste Lokomotivrad am Querschnitte



liegt.

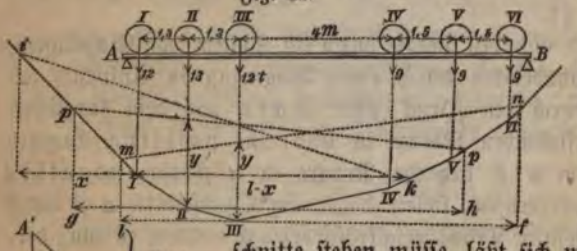
Aus der Betrachtung der Fig. 39 und 40 ergibt sich bezüglich der Kraftmomente im Querschnitte $\alpha\ \beta$, daß jede rechts oder links von $\alpha\ \beta$ innerhalb der Stützen A und F angebrachte Last die Ordinate y im Seilpolygone vergrößert und zwar um so mehr, je näher die Last zum fraglichen Querschnitt rückt. Da nun das Kraftmoment M eines beliebigen Querschnittes $\alpha\ \beta$ mit der zugehörigen Ordinate y des Seilpolygons wächst, so folgt hieraus:

Das Moment M der außerhalb eines beliebigen Querschnittes $\alpha\ \beta$ (Fig. 38) wirkenden äußeren Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ wird durch jede innerhalb der Stützen A und F hinzugefügte Kraft P vergrößert und zwar desto mehr, je mehr sich diese Kraft dem Querschnitte nähert.

Für Brücken ergibt sich hiernach, daß für irgend einen Querschnitt das Moment der äußeren Kräfte am größten wird, wenn die ganze Brücke belastet und die größten Einzellasten möglichst nahe am fraglichen Querschnitte konzentrirt sind.

Da überdies die größte Ordinate des Seilpolygons stets durch eine Ecke desselben geht, so muß, damit das Moment für einen Querschnitt zum Maximum werde, eine der größten Lasten über dem Querschnitte stehen.

Fig. 41.




Welche Last über dem fraglichen Querschnitte stehen müsse, läßt sich mit dem Seilpolygone in jedem speziellen Falle leicht ermitteln.

Zur näheren Erläuterung möge das folgende Beispiel dienen.

**Beispiel.** Die freie Spannweite $l = A\ B$, Fig. 41, der Brücke sei 10 Meter, also gerade so groß, daß eine Lokomotive mit ihrem Tender auf der Brücke aufgestellt werden könnte.

Die Drücke I, II, III der 3 Lokomotivaxen seien der Reihe nach 12, 13, 12 Tonnen, die der

3 Tenderaxen IV, V, VI je 9 Tonnen (wobei bekanntlich 1 Tonne gleich 1000 Kilogramm ist).

Der Abstand der aufeinander folgenden Lokomotivaxen sei 1,3m, der der Tenderaxen 1,5m und jener der letzten Lokomotivaxe von der ersten Tenderaxe 4m.

a) Bestimmung der größten Transversalkräfte.

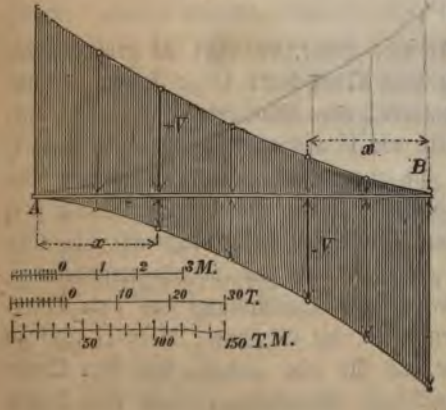
Man konstruire vor Allem für die gegebenen Axendrücke das Kräftepolygon mit dem beliebigen Pole O und zeichne hierzu das Seilpolygon Fig. 42.

Soll nun für einen Querschnitt C, Fig. 43, welcher von der Stütze A um x absteht, die größte Transversalkraft V bestimmt werden, so muß der Zug, von der entfernteren Stütze B kommend, bis zu C auffahren, so daß I auf C zu stehen kommt.

Man trage also die Strecke x von der ersten Ecke I des Seilpolygons Fig. 42, welche dem Drucke I entspricht, in horizontaler Richtung nach links auf, errichte in dem Endpunkte eine Vertikale, welche auf der ersten Seite des Seilpolygones den Punkt i bestimmt, ermittle nun auf dem Seilpolygone einen Punkt k, welcher von i den der Brückenspannweite l gleichen Horizontalabstand hat, verbinde i mit k und führe ∥ zu i k durch den Pol O des Kräftepolygons den Strahl O S, so ist nach früherem $V = A' S$.

Auf dieselbe Weise kann man ganz einfach die den verschiedenen Querschnitten zukommenden größten Transversalkräfte bestimmen.

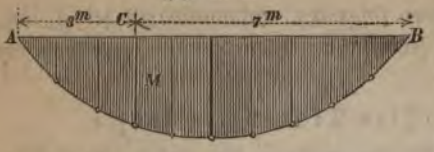
Fig. 43.




Da sich aber die positiven und negativen Transversalkräfte, welche von der Mitte der Brücke gleich weit abstehen, numerisch gleich groß ergeben, so braucht man nur die positiven Transversalkräfte, welche dem von rechts auf der Brücke auffahrenden Zuge entsprechen, zu ermitteln und sie auf die aus der Fig. 43 ersichtlichen Weise zur Bestimmung der negativen Transversalkräfte, die offenbar dem von links auf die Brücke auffahrenden Zuge entsprechen, verwenden.

b) Bestimmung der größten Momente.

Fig. 43 a.




Es soll das Moment für den Querschnitt C, Fig. 43 a, für welchen A C = 3 Meter ist, bestimmt werden.

Da nach Obigem auf einen Querschnitt das größte Moment M dann einwirkt, wenn der ganze Träger belastet ist und über dem Querschnitte eine der größten Lasten liegt, so werden wir uns im vorliegenden Falle zunächst den Zug von rechts nach links kommend auf die Brücke so aufgefahren denken, daß die beiden ersten Lokomotivaxen I, II links von C und die dritte Lokomotivaxe III gerade über C zu stehen kommt und für diesen Fall M bestimmen.

Zu diesem Behufe trage man von der Ecke III des Seilpolygons, Fig. 42, welche der am Querschnitte liegenden Last III entspricht, in horizontaler Richtung die Strecken A C = III $l$ und B C = III f auf, bestimme die zugehörigen Punkte m und n des Seilpolygons und verbinde m mit n. Alsdann ist offenbar m n die Schlußlinie des dieser Belastung entsprechenden Seilpolygons und somit nach §. 8 das gesuchte Moment M gleich dem Produkte aus der vertikalen Ordinate y des Eckpunktes III mit der Poldistanz H; also M = H . y, wobei aber, weil nach Früherem H die konstante Horizontalspannung vorstellt, H nach dem Kraftmaßstabe und y selbstverständlich nach dem angewandten Längenmaßstabe zu messen ist.

Nun untersuche man auf dieselbe Weise, ob nicht M größer wird, wenn die Last II über den fraglichen Querschnitt C zu stehen kommt, ziehe also durch den der Last II entsprechenden Endpunkt II des Seilpolygons eine Horizontale, trage auf ihr von II aus die Strecken A C = II g und B C = II h auf, bestimme die zugehörigen Punkte p und q des Seilpolygons und konstruire die der Ecke II bezüglich der Schlußlinie p q entsprechende Ordinate y'. Da nun bei dieser Belastungsweise die eben gefundene Momentenordinate y' größer ist als die vorhin ermittelte y, so folgt daraus, daß man sich behufs der Bestimmung des dem Querschnitte C zugehörigen Kraftmomentes an die Gleichung M = H . y' zu
[illegible] und zwar um so mehr, als für jede andere über den Quer-
[illegible]etende Radaxe die zugehörige Momentenordinate noch kleiner
[illegible] y.

Auf diese Weise findet man durch wenige Versuche sehr einfach das jedem Querschnitte zukommende größte Kraftmoment.

In Fig. 43 a wurden hiernach die den einzelnen, in der Entfernung von je 1 Meter folgenden Querschnitten zukommenden größten Kraftmomente bestimmt, wobei sich selbstverständlich die bezügliche Untersuchung nur auf die eine Brückenhälfte zu erstrecken hatte.

Zusatz. Obzwar die eben erläuterte Bestimmungsweise des einem beliebigen Querschnitte zukommenden größten Kraftmomentes wenig umständlich ist, so kann man sich doch, um rascher zum Ziele zu kommen, der von Professor Dr. E. Winkler in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines vom Jahre 1870, Heft 2, pag. 33, entwickelten Näherungsmethode bedienen, welche lautet:

Damit das Moment an einem beliebigen Querschnitte ein Maximum werde, muß der Zug eine solche Lage haben, daß sich die Lasten zu beiden Seiten des Querschnittes zu einander nahezu eben so verhalten, wie die Theile, in welche die Spannweite durch den Querschnitt getheilt wird, oder daß die auf die Längeneinheit entfallende Last auf jeder Seite des Querschnittes nahezu gleich groß ist.

Wenden wir diesen Satz zur Kontrole des vorhin behandelten Beispieles an und bestimmen hiernach das dem Querschnitte C, Fig. 43 a zukommende größte Moment, so finden wir, daß dies, wie bereits ermittelt wurde, wirklich eintritt, wenn die Last II über C zu liegen kommt; denn dann wirkt auf das Fragment A C von der Länge 3m nur die Last I mit 12 Tonnen, also per Längeneinheit mit 4 Tonnen und auf das Fragment B C von 7m Länge die Lasten III, IV und V mit 30 Tonnen, somit per Längeneinheit auch nahezu mit 4 Tonnen.

Da nun für jede andere Stellung des Zuges die zu beiden Seiten des Querschnittes C auf die Längeneinheit entfallenden Lasten bedeutend verschiedener sind als für die eben betrachtete, so ist hiernach die obige Bestimmungsweise richtig.

---

Schließlich ist nur noch zu bemerken, daß bei langen Eisenbahnbrücken als größte Belastung gewöhnlich zwei bis drei der schwersten

vollständig armirten Lokomotiven mit daran gereihten schweren Güterwagen gewählt werden, die bis zum zulässigen Maximum ihrer Tragfähigkeit belastet sind und in solcher Anzahl erscheinen müssen, daß der komplete Zug die ganze Länge der Brücke hat.

Um nun bei so langen Brücken die verschiedenen Stellungen des Zuges bezüglich der in Betracht zu ziehenden einzelnen Brückenquerschnitte nicht immer von Neuem zeichnen zu müssen, so wird man am einfachsten die Axeneintheilung des ganzen Zuges nach dem der Zeichnung zu Grunde liegenden Längenmaßstabe auf einem Papierstreifen auftragen, gehörig numeriren und zu den einzelnen Axen die zugehörigen Axendrücke einschreiben.

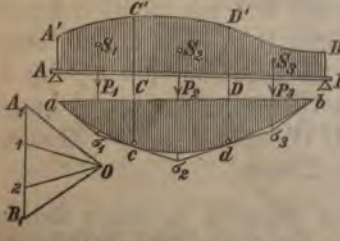
Durch einfache Verschiebung dieses Streifens längs der Brückenlänge lassen sich dann leicht die verschiedenen Stellungen des Zuges auf der Brücke bewerkstelligen, und hieraus die den einzelnen Querschnitten zukommenden größten Transversalkräfte und Momente auf die besprochene Weise bestimmen.

## §. 10.

## Wirkung einer stetig vertheilten Belastung.

Man kann sich offenbar die über die ganze Länge des Trägers stetig vertheilte Last in unendlich viele Einzellasten zerlegt denken, die sich unmittelbar an einander reihen und für die somit das Seilpolygon in eine Seilkurve übergeht, bezüglich welcher natürlich dieselben Gesetze gelten, wie für das Seilpolygon. Denkt man sich überdies die auf jede Längeneinheit des Trägers entfallende Partialbelastung als Ordinate über der Längenaxe A B des Trägers Fig. 44 aufgetragen, so stellt die hierdurch entstandene Fläche A A′ C′ D′ B′ B die sogenannte Belastungsfläche des Trägers vor, welche ein deutliches Bild von der Lastvertheilung gibt.

Fig. 44.




Nehmen wir nun an, es sei a c d b die dieser Belastung entsprechende Seilkurve.

Führen wir an dieselbe in den beliebigen Punkten c und d, welche Punkten C und D entsprechen, die Tangenten, welche sich in $\sigma_2$ *so geht bekanntlich* nach Früherem durch $\sigma_2$ die Mittelkraft der

der Strecke C D zukommenden Belastung, oder mit andern Worten, der Schnittpunkt $\sigma_2$ liegt vertikal unter dem Schwerpunkte $S_2$ der über C D befindlichen Belastungsfläche C C' D' D.

Denkt man sich also die ganze Belastungsfläche in lauter Vertikalstreifen zerlegt, so werden die Schwerpunkte derselben sämmtlich in vertikaler Richtung über den Durchschnittspunkten jener Tangenten liegen, welche durch die den Grenzpunkten der einzelnen Streifen entsprechenden Punkte der Seilkurve gelegt wurden. So liegt z. B. der Schwerpunkt $S_1$ der Belastungsfläche A A' C' C über dem Schnittpunkte $\sigma_1$ der in a und c an die Seilkurve geführten Tangenten, ferner der Schwerpunkt $S_3$ von der über B D liegenden Belastung ober dem Schnittpunkte $\sigma_3$ der in b und d an die Seilkurve konstruirten Tangenten.

Da nun die Strahlen 0 $A_1$, 0 1, 0 2, 0 $B_1$ des Kräftepolygons parallel sind zu den Tangenten der Punkte a, c, d, b, welche den Trennungslinien der einzelnen Streifen entsprechen, so bilden diese Tangenten offenbar das Seilpolygon für die Einzellasten $P_1$ $P_2$ $P_3$.

Hieraus ergibt sich der Satz:

Wenn man die stetige Belastung in vertikale Streifen zerlegt und statt dieser ihre Gewichte $P_1$, $P_2$, $P_3$ ... als Einzellasten in Betracht zieht, so sind die Seiten des entsprechenden Seilpolygons Tangenten an die der stetigen Belastung zukommende Seilkurve, und die Tangentialpunkte liegen lothrecht unter den Trennungslinien der einzelnen Streifen.

Hiernach ist es leicht, beliebig viele Tangenten der Seilkurve zu konstruiren und alsdann die Seilkurve selbst einzuzeichnen.

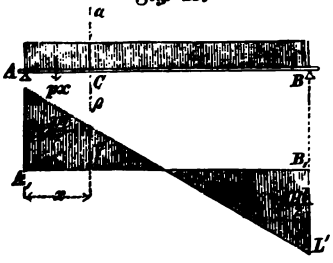
Mittelst der Seilkurve und dem Kräftepolygon lassen sich dann offenbar die Transversalkräfte und Kraftmomente für die einzelnen Querschnitte eben so wie im §. 8 bestimmen.

## §. 11.

## Wirkung einer gleichförmig vertheilten stetigen Belastung.

Bezeichnet man die Größe der über die ganze Länge A B $= l$ (Fig. 45) des Trägers gleichförmig vertheilten Last mit P, so kommt hiervon auf die Längeneinheit des Trägers der Betrag $p = \frac{P}{l}$.

Fig. 45.




Denkt man sich p über A B als konstante Ordinate aufgetragen, so erhält man als Belastungsfläche das Rechteck A A' B' B.

Da hier die ganze Last über den Träger gleichmäßig vertheilt ist, so ist es klar, daß auf jede der beiden Stützen A und B derselbe Stützendruck $D = \frac{P}{2} = \frac{p \cdot l}{2}$ kommt.

Die auf einen beliebigen Querschnitt C, für welchen A C = x, wirkende Transversalkraft V wird offenbar bestimmt sein durch

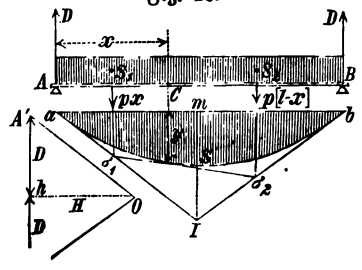
$$V = D - p \cdot x = \frac{p}{2}(l - 2x) \ldots . (\alpha).$$

Für $x = \frac{l}{2}$ wird hiernach $V = 0$.

Am größten wird V für $x = o$, nämlich $V = +\frac{p\,l}{2}$ und für $x = l$, nämlich $V = -\frac{p\,l}{2}$.

Da nun nach der Gleichung ($\alpha$) V mit der Zunahme von x abnimmt und für $x = \frac{l}{2}$ gleich Null wird, so werden im vorliegenden Falle die Transversalkräfte durch eine Gerade L L' abgegrenzt, welche die Axe A B in der Mitte M schneidet und über den Stützpunkten die Ordinaten $A\,L = -B\,L' = \frac{p \cdot l}{2}$ abschneidet.

Fig. 46.




Das auf den Querschnitt C, Fig. 46, wirkende Kraftmoment ist

$$M = D \cdot x - \frac{p\,x^2}{2} = \frac{p\,x}{2}(l - x) \ldots (\beta).$$

Für $x = 0$ oder $x = l$ wird $M = 0$, dagegen erreicht es für $x = \frac{l}{2}$ seinen größten Werth nämlich

$$M = \frac{p \cdot l^2}{8} \ldots . . (\gamma)$$

Die nach der Gleichung ($\beta$) für die verschiedenen Werthe von x konstruirten Momente bestimmen im vorliegenden Falle eine Parabel a s b, deren Scheitel s unter der Mitte von a b in der Tiefe $m\,s = \frac{p\,l^2}{8}$ liegt. Diese Momente lassen sich übrigens sehr leicht aus der dem vorliegenden Falle entsprechenden Seilkurve ermitteln, die sich ganz einfach durch ihre Tangenten bestimmen läßt.

Macht man zunächst im zugehörigen Kräftepolygone $A'B' = p \,.\, l = P$ und $0\,A' = 0\,B'$, so ist, wenn a I und b I die zu den Strahlen $0\,A'$ und $0\,B'$ parallelen Endtangenten der Seilkurve darstellen,

$$\triangle\, a\,I\,m \backsim 0\,A'\,h',$$

also $$I\,m : A'\,h = a\,m : 0\,h,$$

oder $$I\,m : \frac{p \,.\, l}{2} = \frac{l}{2} : H,$$

woraus $$I\,m = \frac{p\,l^2}{4H}.$$

Macht man überdies die Poldistanz H gleich der Krafteinheit, so wird $I\,m = \frac{p\,l^2}{4}$ und es ist somit der Mittelpunkt von I m d. i. der Punkt S der Scheitel der Parabel, denn für ihn ist $m\,s = \frac{m\,I}{2} = \frac{p\,l^2}{8}$ wie oben.

Um nun zu dem unter irgend einem Querschnitte C liegenden Punkte der Seilkurve die Tangente zu konstruiren, ohne die Seilkurve zu haben, beachte man, daß nach dem vorigen Paragraph die Schnittpunkte $\sigma_1$ und $\sigma_2$ der gesuchten Tangente mit a I und b I lothrecht unter den Schwerpunkten $S_1$ $S_2$ von A C und B C liegen müssen.

Da hier wegen der gleichmäßig vertheilten Belastung die Schwerpunkte in der Mitte der einzelnen Fragmente liegen, so ergibt sich für eine Reihe von Tangenten die folgende einfache Konstruktion.

Fig. 47.

Man theile a I und b I in eine gleiche Anzahl gleicher Theile und verbinde die Theilpunkte nach der aus der Fig. 47 ersichtlichen Weise; so geben diese Verbindungslinien eine Schaar von Tangenten der Seilkurve, an welche sich die Seilkurve um so leichter einzeichnen läßt, als hier die durch Ringelchen bezeichneten

gentialpunkte in der Mitte zwischen den Durchschnittspunkten der aufeinander folgenden Tangenten liegen.

Macht man, wie bereits erwähnt wurde, die Poldistanz oder Horizontalspannung H gleich der Krafteinheit, so geben nach §. 8 die lothrechten Ordinaten der Seilkurve die den entsprechenden Querschnitten zukommenden Momente.

Hiernach wäre also für $H = 1$, die im Punkte c Fig. 46 errichtete Ordinate y gleich dem dem Querschnitte C entsprechenden Kraftmomente M. Ist aber H nicht gleich 1, so ist dann $M = H \cdot y$.

## §. 12.

## Reduktion von Einzellasten auf eine gleichmäßige Belastung.

Da sich zufolge des vorigen Paragraphes die Bestimmung der Biegungsmomente für die verschiedenen Querschnitte des Trägers bei gleichmäßiger Belastung desselben sehr einfach ergibt, so pflegen die Praktiker statt der Einzellasten eine gleichmäßige Belastung in Betracht zu ziehen, welche dasselbe Maximalmoment wie die Einzellasten hervorbringt. Hat man nämlich nach §. 9 das den Einzellasten entsprechende Maximalmoment $M_{max}$ für die Mitte des Trägers bestimmt, so berechnet man nun jene gleichmäßig vertheilte Last, welche in der Trägermitte dasselbe Maximalmoment hervorbringt wie die Einzellasten. Nach dem vorigen Paragraphe ist nämlich bei gleichmäßiger Belastung des Trägers das Biegungsmoment für die Trägermitte bestimmt durch $\frac{p \cdot l^2}{8}$, wenn p die Belastung pro Längeneinheit und $l$ die freie Länge des Trägers bedeutet. Aus $M_{max} = \frac{p \cdot l^2}{8}$ erhält man also $p = \frac{8 M_{max}}{l^2}$ . . . . ($\alpha$) als gleichmäßige Belastung des Trägers zur Längeneinheit.

Für einen andern Querschnitt des Trägers stimmt aber das durch die Einzellasten in diesem Querschnitte hervorgebrachte M nicht mit jenem überein, das sich auf Grundlage des obigen Werthes von p bei gleichmäßiger Belastung in diesem Querschnitte ergibt.

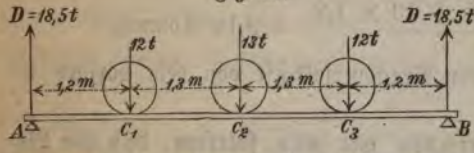
Noch größer wird aber der Unterschied, der sich bei Bestimmung der *Transversalkräfte ergibt*, wenn man statt der Einzellasten die mittelst des

obigen Werthes von p berechnete, stellvertretende gleichmäßige Belastung in Rechnung bringt.

Man begeht daher mehr oder weniger bedeutende Fehler, wenn man bei der Bestimmung von V und M statt der Einzellasten eine gleichmäßige, mittelst des obigen Werthes von p berechnete Belastung zu Grunde legt. Die mittelst dieser idealen Belastung bestimmten Werthe von M und V sind von den wirklichen, der natürlichen Belastung entsprechenden, umsomehr verschieden, je größer der Unterschied der einzelnen Lasten und ihrer Abstände ist, und je kürzer der Träger selbst ist.

Das folgende einfache Beispiel wird dies ersichtlich machen. Fig. 48 stelle einen Brückenträger von 5 Meter Spannweite vor, der also bei der eingezeichneten Radstellung einer darauf befindlichen Lokomotive am meisten auf Biegung in Anspruch genommen ist. Auf jede der beiden Stützen wirkt bei dieser Stellung die Hälfte des Lokomotivgewichtes; jeder Stützendruck beträgt also 18·5 Tonnen. Nach Fig. 48 wird daher für die Brückenmitte

Fig. 48.




$$M_{max} = D \cdot \overline{AC_2} - 12 \times 1{,}3 = 30{,}65 \text{ Tonnemeter},$$

und somit nach Gleichung ($\alpha$)

$$p = \frac{8 \times 30{,}65}{25} = 9{,}808 \text{ Tonnen}.$$

Fig. 49.

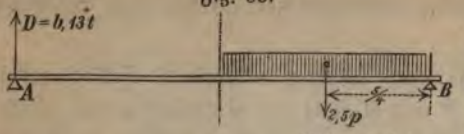
Rechnet man nun bei gleichmäßiger Belastung das Moment für den Querschnitt $C_1$ so wird hierfür, nach Fig. 49,

$$M = 1{,}2\ D - 1{,}2\ p \times 0{,}6 = 15{,}13824 \text{ Tonnemeter}.$$

Rechnet man aber für denselben Querschnitt $C_1$ das Moment bei der gezeichneten Radstellung, Fig. 48, so wird
$M = 1{,}2\ D = 22{,}2$ Tonnemeter, also bedeutend größer als bei gleichmäßiger Belastung.

Wir wollen nur noch die größte Transversalkraft für die Mitte des Trägers bei der idealen und bei der natürlichen Belastung bestimmen. Für diesen Fall darf der Träger (nach §. 9) nur bis zur Mitte belastet sein.

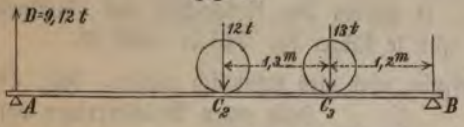
Fig. 50.




Bei gleichmäßiger Belastung der Trägerhälfte, Fig. 50, wird für die Mitte des Trägers

$$V = D = \frac{2{,}5\ p \times \frac{5}{4}}{5} = 6{,}13 \text{ Tonnen.}$$

Fig. 51.




Bei der natürlichen Belastung der Trägerhälfte, Fig. 51, wird aber

$$V = D = \frac{12 \times 2{,}5 + 13 \times 1{,}2}{5} = 9{,}12 \text{ Tonnen,}$$

somit ist der letztere Werth der Transversalkraft von dem vorigen bedeutend verschieden.

**Aus diesem Beispiele ersehen wir also sattsam, daß die Bestimmung der M und V für verschiedene Querschnitte mit Zuhilfenahme einer idealen, gleichmäßigen Belastung, die mittelst des obigen Werthes von p von den Praktikern gerechnet wird, unzulässig ist und daß man also bei rationellem Vorgange die wirkliche Belastung behufs der Bestimmung der Biegungsmomente und Transversalkräfte in Betracht ziehen, und nach § 9 diese Bestimmung vornehmen müsse.**

## §. 13.

## Wirkung des Eigengewichtes und der zufälligen Belastung eines Trägers.

Die gleichzeitige Wirkung des Eigengewichtes und der zufälligen oder temporären Belastung eines Trägers, wie sie namentlich bei langen Brücken vorkommt, wird man offenbar durch Kombination der in den letzten Paragraphen bezüglich der Transversalkräfte und der Momente entwickelten Bestimmungen vorzunehmen haben. Da man sich aber behufs ersten Näherungsberechnung der auf die einzelnen Querschnitte eines en Trägers wirkenden Transversalkräfte und Momente das Eigen- r die ganze Länge des Trägers gleichmäßig vertheilt denkt, so

wird man vor allem die Ergebnisse des 9. und 11. Paragraphs zu kombiniren haben. Hierbei kann man sich bezüglich des Eigengewichtes der Brücken zunächst an die aus zahlreichen Brückenkonstruktionen abgeleitete empirische Formel halten.

Bezeichnet man nämlich das Eigengewicht einer Brücke per Meter mit g, so ergibt sich für Eisenbahnbrücken mit einem Geleise durchschnittlich

$$g = 800 + 30\,l,$$

wobei g in Kilogrammen und die Spannweite $l$ in Metern auszudrücken ist.

Hat man mit dem nach dieser Formel vorläufig bestimmten Eigengewichte und der größten zufälligen Belastung die den einzelnen Querschnitten zukommenden größten Transversalkräfte und Momente ermittelt, so wird man hiernach die Größe der Querschnitte zu berechnen und hieraus das wirkliche Gewicht des Trägers zu eruiren haben, worauf dann nochmals mit diesem rektifizirten Eigengewichte und der größten zufälligen Belastung die Maxima der Transversalkräfte und Momente für die einzelnen Querschnitte zu ermitteln und hiernach die Dimensionen dieser Querschnitte endgiltig zu bestimmen sein werden.

Zu bemerken ist noch, daß man bei Straßenbrücken als größte mobile Belastung jene rechnet, welche durch ein auf der Brückenbahn stattfindendes Menschengedränge entsteht. Da nun hierbei erfahrungsmäßig auf einen Quadratmeter höchstens 5 bis 6 Mann kommen, und das durchschnittliche Gewicht eines Mannes nicht mehr als 70 Kilogr. beträgt, so ergibt sich pro Quadratmeter 350 bis 420 Kilogr. als größte zufällige Belastung der Straßenbrücken.

Für Brücken in Landstraßen kann man die kleinere Zahl, dagegen für Brücken in Städten die größere Zahl als maßgebend betrachten.

## §. 14.

## Zerlegung der Kräfte.

a) Zerlegung einer Kraft nach zwei Richtungen. Soll die Kraft P, Fig. 52, in zwei Komponenten nach gegebenen Richtungen zerlegt werden, so kann dies auf die bekannte Weise durch Konstruktion des Kräfteparallelogrammes geschehen.

Fig. 52.

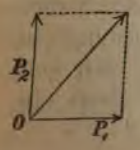
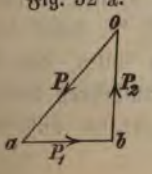



Fig. 52 a.

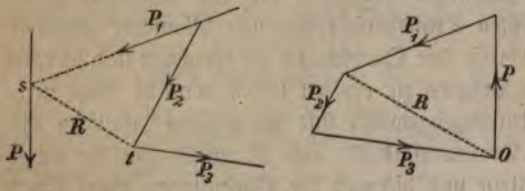



Rascher kommt man aber zum Ziele

wenn man die im §. 7 entwickelten Eigenschaften des Kräftepolygones anwendet. Demzufolge kehre man den Richtungspfeil der zu zerlegenden Kraft P um, und mache sie in Fig. 52 a zur Schlußlinie in dem Zuge der zusammensetzenden Kräfte. Nach dieser Methode werden wir in der Folge vorgehen.

b) Zerlegung einer Kraft in drei Richtungen. Soll die Kraft P, Fig. 53, in Richtungen der Geraden $P_1$, $P_2$, und $P_3$ in Komponenten zerlegt werden, so verlängert man P bis zum Schnittpunkte s mit einer dieser Geraden, z. B. mit $P_1$ und zerlegt zunächst P (nach Fig. 52 a) in der Richtung von $P_1$ und in Richtung der Verbindungslinie R des Schnittpunktes s mit dem Schnittpunkte t der beiden anderen Geraden. Die letztere Komponente, d. i. R, zerlege man nun (wieder bei umgekehrter Pfeilrichtung) in Richtung von $P_2$ und $P_3$ und erhält alsdann in dem geschlossenen Linienzug P, $P_1$, $P_2$, $P_3$ die Richtung und Größe der drei Komponenten $P_1$, $P_2$ und $P_3$ von P.

Fig. 53.



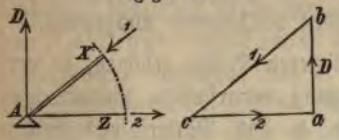

Soll eine Kraft in mehr als drei, bloß der Richtung nach gegebene Kräfte zerlegt werden, so wird die Aufgabe unbestimmt.

## §. 15.

## Bestimmung der durch eine äußere Kraft hervorgerufenen inneren Kräfte.

Da nach §. 7 die äußeren Kräfte mit den durch dieselben in einem Träger hervorgerufenen inneren Kräften im Gleichgewichtszustande gleiche Größe aber **entgegengesetzte Richtung** haben müssen, so wird man dort, wo durch die Zerlegung einer äußeren Kraft die durch dieselbe hervorgerufenen inneren Kräfte bestimmt werden sollen, den Richtungspfeil [illegible]en Kraft bei ihrer Zerlegung **nicht umkehren** dürfen, weil sonst [illegible]ie äußeren Komponenten der zerlegten äußeren Kraft zum

Fig. 54.




Ist z. B. der auf die beiden Stäbe A X und A Z, Fig. 54, irgend eines Trägers im Punkte A wirkende Stützendruck D gegeben, so wird man, um die durch denselben in den Stäben A X und A Z hervorgerufenen inneren Kräfte oder Spannungen 1 und 2 zu erhalten, bei der Zerlegung von D in Richtung dieser Stäbe den Richtungspfeil von D nicht umkehren dürfen. Man wird also den Stützendruck D, nach Fig. 54, direkt in Richtung der Stäbe A X und A Z zerlegen, und erhält durch b c und c a die gesuchten Spannungen der Größe und Richtung nach.

Anmerkung: Ist aus einer inneren in einem Stabe thätigen Kraft S die Anspruchnahme zweier anderer in demselben Knotenpunkte mit S vereinigten Stäbe zu bestimmen; d. h. ist eine innere Kraft wieder in innere Kräfte zu zerlegen, so wird man offenbar, dem §. 14 entsprechend, vor der Zerlegung von S nach den gegebenen Stabrichtungen zunächst den Richtungspfeil von S umzukehren haben.

---

# 2. Abschnitt.

## Das Fachwerk.

### §. 16.

Allgemeines. Aus den vorhergehenden Paragraphen hat sich ergeben, daß sich eine Kraft mit voller Bestimmtheit in zwei oder drei der Richtung nach gegebene Komponenten zerlegen läßt. Man soll daher die aus mehreren Stücken zusammengesetzten Träger derart konstruiren, daß durch einzelne Querschnitte nicht mehr als drei Konstruktionstheile geschnitten werden; denn nur dann ist man in der Lage, ohne jede Zweideutigkeit die Resultirende der außerhalb des Schnittes wirkenden äußeren Kräfte in Richtung der durchschnittenen Konstruktionstheile zu z
und hiernach die Anspruchnahme dieser Konstruktionstheile zu bes

Sobald aber ein Stab nur durch eine in Richtung seiner axe wirkende Kraft in Anspruch genommen ist, so vertheilt sich

diese Zug- oder Druckkraft gleichmäßig über den ganzen Querschnitt des Stabes; es wird also das Material desselben vollkommen ausgenützt.

Wird dagegen der Stab durch die äußeren Kräfte gebogen, so vertheilen sich bekanntlich die durch die Biegung verursachten Spannungen ungleichmäßig im Innern des Stabes, d. h. das Materiale desselben wird nicht vollständig ausgenützt.

**Eine gute Konstruktion soll daher wo möglich nur aus Theilen zusammengesetzt sein, in denen nur Längenspannungen vorkommen;** dies ist zunächst nur bei den sogenannten Fachwerkträgern der Fall.

**Ein einfaches Fachwerk besteht nämlich in allgemeinster Form aus zwei Gurtungen, welche durch Stangen zu einer Reihe fester Dreiecke derart verbunden sind, daß die einzelnen Glieder nur nach ihrer Längenrichtung in Anspruch genommen, d. h. gezogen oder gedrückt werden.**

Diese Bedingung erfordert aber, daß die Stangen in den Verbindungspunkten durch einfache Gelenkbolzen, oder wie man sagt durch Scharniere, verbunden sind, welche die Drehung der Stangen nicht hindern und es somit ermöglichen, daß sich dieselben den Kraftrichtungen des Kräftepolygones anpassen, also das dazu gehörige Gelenkpolygon bilden.

Bei allen folgenden Beispielen wird daher vorausgesetzt, daß je zwei Stangen in ihren Schnitt- oder Knotenpunkten durch Gelenkbolzen verbunden sind. Zugleich wird die zulässige Annahme gemacht, daß die Gelenk- oder Knotenpunkte ausschließlich die Belastungspunkte bilden, wie es bei richtig konstruirten Fachwerkträgern der Fall ist, indem die Belastung durch die sogenannten Quer- oder Zwischenträger auf die Knotenpunkte der Hauptträger übertragen wird.

Da man sich ferner das Eigengewicht der ganzen Konstruktion über die ganze Länge des Trägers gleichmäßig vertheilt denkt, so wird man also auch das Eigengewicht der zwischen zwei Knotenpunkten liegenden Konstruktion zur Hälfte auf jeden der beiden Knotenpunkte zu übertragen haben.

Bei der Konstruktion des Kräfteplanes zur Bestimmung der Spannungen in den einzelnen Gliedern des Fachwerkes wollen wir hauptsächlich folgende Bezeichnung beobachten.

Nachdem die Vertheilung der äußeren Kräfte auf die einzelnen Knotenpunkte festgestellt ist, beginnt man eine der äußeren Kräfte, *am besten die Auflagerreaktion*, in Richtung der vom betreffenden Knotenpunkte auslaufenden Stangen nach §. 15 zu zerlegen, darauf die so erhaltenen Stabspannungen an dem nächsten Knotenpunkte mit den dort angreifenden äußeren Kräften zu einer Resultirenden zu vereinigen und diese Resultirende wieder den folgenden Stabrichtungen nach zu zerlegen u. s. w. Die sich hierbei aneinander reihenden Kräfte-Dreiecke bilden in ihrem Zusammenhange den Kräfteplan. Der besseren Uebersicht wegen wollen wir im Kräfteplane die einzelnen Spannungen mit denselben Nummern bezeichnen, wie die zugehörigen Stäbe im Bauplane; überdies wollen wir *Zugspannungen mit einfachen, Druckspannungen mit doppelten* und die Hilfsresultanten mit punktirten Linien andeuten. Die *gedrückten* Stäbe sollen in der Folge *Streben*, die *gezogenen* aber *Zugbänder* genannt werden.

Obzwar über die Richtung der inneren Kräfte oder Spannungen in den einzelnen Stäben des Fachwerkes nach den Bemerkungen der §§. 7, 14 und 15 kein Zweifel mehr herrschen kann, so möge hier doch nochmals erwähnt werden, daß wenn man die Pfeilrichtung einer inneren Kraft, wie sie sich aus dem Kräfteplan ergibt, auf den entsprechenden Stab des Trägers derart überträgt, daß dieselbe jenem Knotenpunkte, von dem aus die Zerlegung vorgenommen wurde, zunächst liegt, und nun am folgenden Knotenpunkte des Stabes einen zweiten Pfeil in entgegengesetzter Richtung hinzugefügt, alsdann nach §. 7

für die *inneren Kräfte* { die Zusammenstellung ← → Druckspannung
„ „ → ← Zugspannung

bedeutet, während sich für die äußeren Kräfte die gerade entgegengesetzte Zusammenstellung ergab.

Denkt man sich übrigens den fraglichen Stab durchschnitten und nur jenen Theil des Stabes vorhanden, welcher dem Knotenpunkte, von dem aus die Kraftzerlegung vorgenommen wurde, zunächst liegt, und statt des weggeschnittenen Theiles die aus dem Kräfteplane bestimmte innere Kraft thätig, so wird, wenn die Pfeilrichtung derselben nach dem Ende des weggeschnittenen Theiles, also nach außen gekehrt ist, in demselben Zug, dagegen, wenn sie entgegengesetzt, also nach innen gekehrt ist, Druck herrschen.

## § 11.

## Gleichgewicht der Kräfte im Fachwerk.

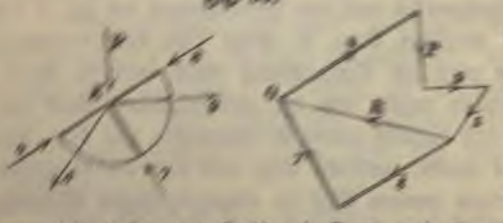
Soll ein Fachwerk unter dem Einflusse seiner Belastung im Gleichgewichte stehen, so müssen sich offenbar die auf jeden Knotenpunkt wirkenden äußeren und inneren Kräfte das Gleichgewicht halten; sie müssen sich daher nach § 7 zu einem geschlossenen Kräftepolygone vereinigen lassen.

Dieser Umstand setzt uns in die Lage:

1. zu kontrollieren, ob die Kraftbestimmung der einzelnen sich in einem Knotenpunkte schneidenden Stäbe richtig bestimmt wurde und

2. von n aus einem Knotenpunkte ausstrahlenden Stäben die Kraftbestimmung von zweien derselben zu ermitteln, wenn die auf den Knotenpunkt wirkende äußere Kraft und die Kraftbestimmung von (n—2) dieser Stäbe der Richtung und Größe nach gegeben ist.

Fig. 56.



Schneidet man z. B. den Knotenpunkt K, Fig. 56, aus irgend einem Fachwerk heraus und sind die auf K wirkenden Kräfte P, 4, 5 und 9 bekannt, dagegen jene 7 und 8 unbekannt, so setze man die bekannten Kräfte 4, P, 9 und 5 zur Resultante R zusammen, kehre den Pfeil von R um und zerlege R in die Kräfte 8 und 7, indem man durch die Endpunkte Parallele zu ihren Richtungen zieht.

---

Wir schreiten nun zur Konstruktion der Kräftepläne für Fachwerk-
wir unterscheiden wollen:
träger mit konstanter Belastung,
träger mit beweglicher Belastung.
gehören die als Fachwerkträger hergestellten Dachkon-
en Balken des Hochbaues, nämlich Sprengwerke,
Häng- und Sprengwerke ꝛc., sowie die Krahne
ren die Brückenträger.

---

# A. Fachwerkträger mit konstanter Belastung.

## §. 18.

## Dachstühle.

Bei Berechnung der Dachkonstruktionen wird gewöhnlich eine gleichförmige lothrechte Belastung der Dachsparren vorausgesetzt, was insofern nicht ganz richtig ist, als erfahrungsmäßig der auf die Dachfläche wirkende Winddruck von der horizontalen Richtung gewöhnlich um circa 10 Grad abweicht. Da übrigens die Dachkonstruktionen ohnedies mit großer Sicherheit gebaut werden, indem man gleichzeitig neben dem möglichst größten Winddruck auch noch den möglichst größten Schneedruck voraussetzt, so begnügt man sich in der Praxis gewöhnlich mit einer, der obigen Annahme entsprechenden Berechnungsweise, der wir uns, der Einfachheit halber, anschließen wollen.

Die Belastung eines Daches besteht also:

1. aus dem Eigengewichte der ganzen Dachkonstruktion,
2. aus dem Gewichte der im Winter darauf liegenden möglichst größten Schneemenge und
3. aus dem größten Winddrucke.

### 1. Eigengewicht der Dächer.

#### A. Holzdächer.

| L. Nr. | Art der Eindeckung | Mittleres Gewicht in | |
|---|---|---|---|
| | | Kg. pr. □$^m$ | Zpfd. pr □$'$ |
| 1 | Einfaches Ziegeldach . . . . . | 100 | 20 |
| 2 | Doppel- und Kronziegeldach . . . . . | 125 | 25 |
| 3 | Gewöhnliches Schieferdach . . . . . | 75 | 15 |
| 4 | Asphaltdach mit Lehmunterlage . . . . . | 60—75 | 12—15 |
| 5 | dto. „ Fließenunterlage . . . . . | 100 | 20 |
| 6 | Dach mit Theerpappe . . . . . | 30 | 6 |
| 7 | Dach mit Zink- oder Eisenblech . . . . . | 40 | 8 |

## B. Metalldächer.

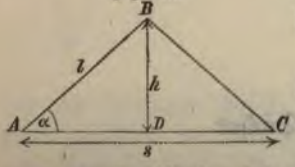
| L. Nr. | Art der Eindeckung | Mittleres Gewicht in | |
|---|---|---|---|
| | | Kg. pr. □m | Zpfd. pr □' |
| 1 | Schiefer auf Winkeleisen . . . . . | 50 | 10 |
| 2 | Ebenes Eisenblech auf Winkeleisen . . | 25 | 5 |
| 3 | Gewelltes „ „ „ . . . . . | 22 | 4,3 |
| 4 | Zinkwellenblech auf Winkeleisen . . . . | 24 | 4,7 |

## 2. Schneedruck.

Die größte Höhe des Schneefalles in Mitteleuropa beträgt circa 0,625 Meter oder 2 Fuß. Da nun die Dichte des Schnees beiläufig $^1/_8$ von jener des Wassers ist, so entspricht der größte Schneedruck dem Gewichte einer 0,079 Meter oder $^1/_4$ Fuß tiefen Wasserschichte, die man sich über die horizontale Projektion des Daches gleichmäßig ausgebreitet zu denken hat.

Der Schneedruck auf eine horizontale Fläche beträgt daher, weil 1 Kub.-Meter Wassers 1000 Kilogr. wiegt, 78 Kilogramme pr. Quadratmeter oder 15,6 Zollpfund pr. Quadratfuß.

Fig. 56.




Dieser Druck vermindert sich pr. Quadrateinheit der Dachfläche im Verhältnisse der halben Spannweite s, Fig. 56, zur Sparrenlänge l, und nimmt für die nachstehende Neigung von Dachflächen folgende Werthe an.

| h / s | Schneedruck | |
|---|---|---|
| | in Kg. pr. □m | in Zpfd. pr. □' |
| $^1/_2$ | 55,0 | 11,0 |
| $^1/_3$ | 65,0 | 13,0 |
| $^1/_4$ | 70,0 | 14,0 |
| | 73,0 | 14,6 |
| | 74.0 | 14,8 |
| | 75,0 | 15,0 |
| | 75,5 | 15,1 |
| | 76,0 | 15,2 |
| | 77,0 | 15,4 |

## 3. Winddruck.

Die Größe des Druckes p, welchen der Wind ausübt, der in normaler Richtung die Quadrateinheit trifft, beträgt erfahrungsmäßig pr. Quadratmeter in Kilogr. $p = 0{,}113\ v^2$, wenn man v, d. i. die Geschwindigkeit des Windes pr. Secunde in Metern ausdrückt, oder pr. Quadratfuß in Zollpfund $= 0{,}00226\ v^2$, wenn v in Fußen ausgedrückt wird.

Fig. 57.

Da nun die Windrichtung mit der Horizontalen gewöhnlich einen Winkel von 10 Graden einschließt, so bildet die Windrichtung mit einer gegen den Horizont unter dem Winkel $\alpha$ geneigten Ebene A B, Fig. 57, den Winkel $(\alpha + 10^0)$. Macht man A D senkrecht zur Windrichtung und B D parallel zu derselben, so wird der auf die Wand A B, von der Tiefe Eins, wirkende Winddruck W bestimmt sein durch $W = p \,.\, A\,D$, oder weil $A\,D = A\,B \sin (\alpha + 10^0)$, so wird $W = p \,.\, A\,B \,.\, \sin (\alpha + 10^0)$; daher der per Flächeneinheit längs A B thätige Winddruck

$$w = \frac{W}{A\,B} = p \,.\, \sin (\alpha + 10^0), \ldots\ldots (1).$$

Zerlegt man w in eine lothrechte Komponente q und in eine zweite s, welche längs der Dachfläche A B wirkt, so verhält sich

$$w : q = \sin \beta : \sin (\alpha + 10^0);$$

oder weil $\beta = 90^0 - \alpha$, also $\sin \beta = \cos \alpha$,

$$w : q = \cos \alpha : \sin (\alpha + 10^0),$$

woraus wenn für w der obige Werth aus (1) eingeführt wird,

$$q = \frac{p \,.\, \sin^2 (\alpha + 10^0)}{\cos \alpha} \ldots\ldots (2).$$

Nimmt man als größte Geschwindigkeit des Windes $v = 31{,}6$ Meter oder 100 Fuß an, so wird in Kilogr. pr. Quadratmeter $p = 113$, oder in Zollpfund pr. Quadratfuß $p = 22$.

Bezeichnet man, nach Fig. 56, die Höhe des Daches mit h, die Spannweite mit s, so ist der Winkel $\alpha$ bestimmt durch $\text{tang} \,.\, \alpha = \frac{2\,h}{s}$; berechnet man nun nach der Formel (2) den lothrechten Druck des Windes auf die Flächeneinheit der Dachfläche A B, so ergibt sich für verschieden geneigte Dachflächen:

## der lothrechte Winddruck q.

| $\frac{h}{s}$ | in Kg. pr. □m | in Zpfd. pr. □′ |
|---|---|---|
| 1/2 | 107,20 | 21,44 |
| 1/3 | 64,75 | 12,95 |
| 1/4 | 44,65 | 8,93 |
| 1/5 | 33,90 | 6,78 |
| 1/6 | 27,10 | 5,42 |
| 1/7 | 22,45 | 4,49 |
| 1/8 | 19,30 | 3,86 |
| 1/9 | 17,00 | 3,40 |
| 1/10 | 15,02 | 3,04 |

## Lothrechter Totaldruck.

Addirt man die Belastungen, die sich aus dem Eigengewichte der ganzen Dachkonstruktion, sowie aus dem größten Schneedrucke und aus der lothrechten Komponente des Winddruckes ergeben, so erhält man die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werthe.

## Lothrechte Totalbelastung der Dachflächen in Kg. pr. □m *)

| | Art der Eindeckung | h/s = 1/2 | 1/3 | 1/4 | 1/5 | 1/6 | 1/7 | 1/8 | 1/9 | 1/10 | Durchschnittlich in Kg. pr. □m |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Holzsparren | Einfache Ziegellage | 260 | 230 | 215 | — | — | — | — | — | — | 235 |
| | Doppelte „ | 285 | 255 | 240 | — | — | — | — | — | — | 260 |
| | Schiefer | 235 | 205 | 190 | 180 | — | — | — | — | — | 205 |
| | Asphalt mit Lehmunterlage | 235 | 205 | 190 | 180 | 175 | 170 | 170 | 165 | 165 | 185 |
| | dto. „ Fließenunterlage | 260 | 230 | 215 | 205 | 200 | 195 | 195 | 190 | 190 | 210 |
| | Theerpappe | 190 | 160 | 145 | 135 | 130 | 125 | 125 | 120 | 120 | 140 |
| | Zink- oder Eisenblech | 200 | 170 | 155 | 145 | 140 | 135 | 135 | 130 | 130 | 150 |
| ...ischer | Ebenes Eisenblech auf Winkeleisen | 187 | 155 | 140 | 132 | 126 | 123 | 120 | 118 | 117 | 135 |
| | Zinkwellenblech auf Winkeleisen | 184 | 152 | 137 | 129 | 123 | 120 | 118 | 115 | 114 | 132 |
| | ...enblech auf Winkeleisen | 212 | 180 | 165 | 175 | 151 | 148 | 143 | 143 | 142 | 160 |

...genden Zahlenwerthen die totale Belastung des Daches in ß zu erhalten, braucht man nur dieselben mit 0,2 zu

Beispiel: Welcher Druck kommt auf einen eisernen Sparren A B, Fig. 56, eines mit Schiefer auf Winkeleisen eingedeckten Daches, dessen Spannweite $s = 8^m$, dessen Höhe $h = 2^m$ und bei welchem die Entfernung zweier aufeinanderfolgenden Sparren $3^m$ beträgt.

Die Länge des Sparrens berechnet sich hier aus

$$l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} = 4{,}47^m.$$

Es kommt somit auf einen Sparren die Druckfläche : $4{,}47 \times 3 = 13{,}41\ \square^m$. Da nun im vorliegenden Falle $\frac{h}{s} = \frac{1}{4}$ und hierfür nach der Tabelle der Druck per □Meter der Dachfläche 165 Kilogr. beträgt, so kommt auf einen Sparren der Druck

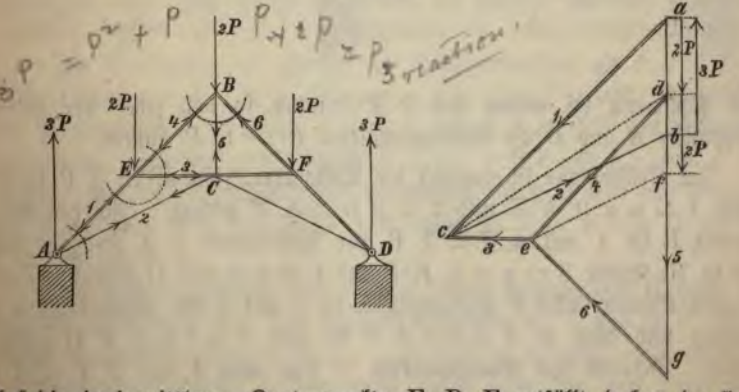
$$13{,}41 \times 165 = 2212.63 \text{ Kilogr.}$$

---

## Kräftepläne für Dachstühle.

I. Der deutsche Dachstuhl. Fig. 58. Der Sparren A B wird hier in zwei gleiche Felder A E und E B mit dem Knotenpunkte E zerlegt. Nimmt man an, daß auf jedes Feld eines Sparrens der Druck 2 P wirkt, so entfällt hiervon auf jeden Endpunkt eines Feldes die Hälfte.

Fig. 58.



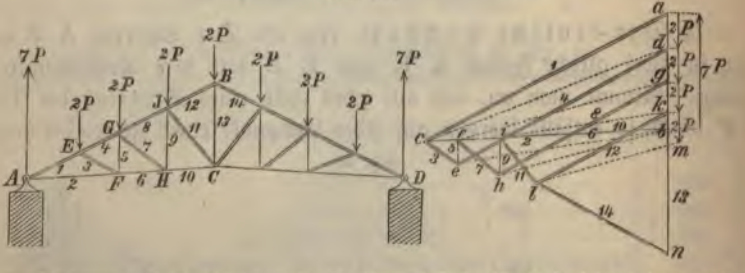

Auf die drei mittleren Knotenpunkte E, B, F entfällt daher, da sie zu beiden Seiten belastet sind, der Druck 2 P, dagegen auf jeden der beiden Endpunkte A und D nur der Druck P.

Jeder der beiden Stützpunkte hat aber einen Gegendruck — die sogenannte Auflagerreaktion — zu leisten, welcher der Hälfte der totalen Belastung gleich kommt. Jede Auflagerreaktion ist hier also $4P - P = 3P$, die sich als active Kraft auf die Stabverbindung äußert.

Im Kräfteplan ist zunächst die Auflagerreaktion $3\ P = ab$ in die inneren Kräfte 1 und 2 der Stäbe A E und A C zerlegt worden. Auf den Knotenpunkt E wirkt nun 1, 2 P, 3 und 4; da aber 1 und 2 P bekannt sind, so setze man $a\ d = 2\ P$ mit 1 zur Resultante c d dieser beiden Kräfte zusammen und zerlege c d nach §. 14 in die Kräfte 3 und 4, die sich als Druckkräfte ergeben. Für den Knotenpunkt B vereinige man schließlich 4 mit $d\ f = 2\ P$ zur Resultanten e f und zerlege dieselbe in die Kräfte 5 und 6. Die andere Hälfte des Kräfteplanes würde offenbar wegen der symmetrischen Anordnung der Dachkonstruktion gerade so wie die bereits gefundene ausfallen.

II. Der englische Dachstuhl. Fig. 59. Jedes der vier Felder

Fig. 59.




eines Sparrens sei wieder mit 2 P belastet, so daß jeder der beiden Stützpunkte A und D die Auflagerreaktion $(8 - 1)\ P$ äußert.

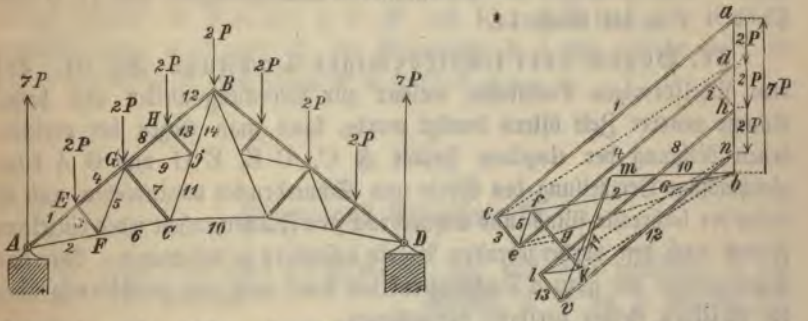
Im Kräfteplane ist zunächst die Auflagerreaktion $ab = 7\ P$ in die Kräfte $1 = a\ c \parallel A\ E$ und $2 = c\ b \parallel A\ F$ zerlegt. Für den Knotenpunkt E ist 1 mit $a\ d = 2\ P$ zur Resultanten c d vereinigt und diese in die Kräfte $3 = c\ e \parallel E\ F$ und $4 = e\ d \parallel E\ G$ zerlegt. Dar-
tenpunkte F übergegangen ist 2 mit 3 zur Mittelkraft e b
ieſe in $5 = e\ f \parallel F\ G$ und $6 = f\ b \parallel F\ H$ zerlegt
des Knotenpunktes G ſetze man 4 mit $2\ P = d\ g$
Reſultante g f zuſammen und zerlege dann g f in die
1 und $8 = h\ g \parallel G\ F$. Auf den folgenden Kno-
ereinige man 6 mit 7 zur h b und zerlege h b

in 9 = h i || H J und 10 = i b || H C. Hierauf schreite man zum Punkte J, vereinige zunächst 8 mit 2 P und 9 zur Resultante i k und bilde aus i k die Komponenten 11 = i l || JC und 12 = l k || J B. Endlich ist für den Punkt B 12 mit 2 P zur Resultanten l m zu vereinigen und diese in 13 = m n || B C und 14 = l n || B D zu zerlegen.

Offenbar ist wegen der symmetrischen Anordnung 14 = 12, und sind auch die Anspruchnahmen der anderen zur Mitte symmetrisch gelegenen Stäbe in beiden Dachhälften gleich.

III. Der belgische oder französische Dachstuhl. Fig. 60.

Fig. 60.




Jedes der vier Felder eines Sparrens sei wieder mit 2 P belastet, so daß hier dieselbe Lastvertheilung vorkommt wie beim vorigen Dachstuhle.

Im Kräfteplane ist zunächst die Auflagerreaktion ab = 7 P in die beiden Kräfte 1 = a c || A E und 2 = c b || A F zerlegt. Darauf für den Knotenpunkt E die Kraft 1 = a c mit a d = 2 P zur Resultante c d vereinigt, und diese in die Kräfte 3 = c e || E F und 4 = e d || E G zerlegt. Auf den Knotenpunkt F übergehend, ist 2 = c b mit 3 = c e zur Resultante b e verbunden und diese in 5 = e f || F G und 6 = f b zerlegt.

Bei dem Uebergange auf den folgenden Knotenpunkt G hätte man nun die Resultante aus den bekannten Kräften 4, 5 und 2 P in drei Kräfte von der Richtung G C, G J und G H zu zerlegen; es wird mithin die Aufgabe unbestimmt. Man wird daher eine der drei unbekannten Kräfte, z. B. 7, bestimmen müssen. Zu diesem Behufe berücksichtige man, daß wegen der symmetrischen Anordnung der beiden Zugstangen G J in Bezug auf G C die in denselben wirkenden Kräfte 5

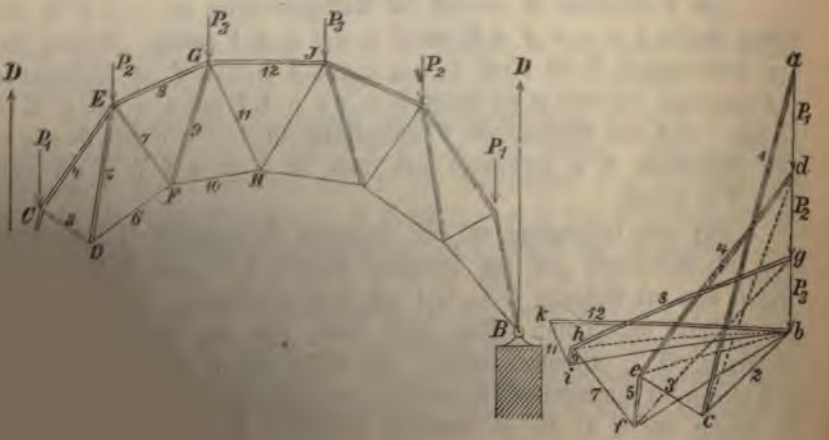
sind, indem sie auf gleiche Weise aus 2 P entstehen. Die Pressung der Strebe G C nämlich 7, wird daher die Resultante aus den gleichen Spannungen 5 und 9 und die zu G C parallel gerichtete Komponente von 2 P aufzunehmen haben. Man mache daher e g = 5 und ‖ G J, g k = h i, so ist f k ‖ 7 . h k stellt nun die Resultante aus 7, 5, 4 und 2 P vor, die sich jetzt in die beiden Komponenten k l = 9 und l h = 8 zerlegen läßt.

Die Resultirende aus 6 = b f und 7 = f k, d. i. b k gibt durch entsprechende Zerlegung die Kräfte 10 = b m und 11 = k m; darauf ist 8 = l h und 2 P = h n zur Resultanten l n zu vereinigen und hieraus durch entsprechende Zerlegung 12 = n v und 13 = v l zu suchen. Schließlich gibt die Schlußlinie im Kräftepolygone aus 11, 9 und 13, d. i v m die Kraft 14.

IV. Bogen- oder sichelförmiger Dachstuhl. Fig. 61. Bei dem sichelförmigen Dachstuhle, welcher zur Bedeckung weiter und hoher Räume neuerer Zeit öfters benützt wurde, kann man wegen der verschiedenen Neigung der einzelnen Felder A C, C E, E G und G J keine gleichmäßige Vertheilung des Wind- und Schneedruckes voraussetzen, und ist daher der lothrechte Wind- und Schneedruck pro Flächeneinheit jedes einzelnen Feldes nach den vorhergehenden Regeln besonders zu bestimmen. Nur das Eigengewicht der ganzen Dachkonstruktion kann man als gleichförmig über die einzelnen Felder vertheilt voraussetzen.

Bezeichnet man die drei verschiedenen Belastungen der oberen Knoten-

Fig. 61.



punkte mit $P_1$, $P_2$, $P_3$, so wird jede Auflagerreaktion die Größe $D = P_1 + P_2 + P_3$ erreichen.

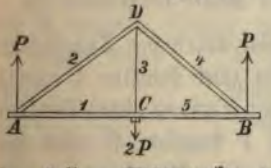
Im Kräfteplane ist zunächst die Auflagerreaktion ab = D zerlegt in 1 = ac || A C und 2 = b c || A D. Auf den Knotenpunkt C übergehend, vereinige man zunächst 1 mit $P_1$ zur Resultante c d und zerlege dieselbe in die Kräfte 3 = c e || C D und 4 = c d || C E. Hierauf schreite man zum nächstfolgenden Knotenpunkte D, vereinige vor Allem die schon bekannten Kräfte 2 und 3 zur Resultante b e und zerlege letztere in 5 = e f || E D und 6 = f b || D F. Für den Knotenpunkt E ergibt sich aus der Vereinigung von 4 mit 5 und $P_2$ die Resultante f g, durch deren Zerlegung die Kraft 7 = f h || E F und 8 = h g || E G gewonnen wird. Aus 6 und 7 bilde man nun die Resultante b h und zerlege dieselbe in 9 = h i || G F und 10 = i b || F H. Endlich vereinige man 8, 9 und $P_3$ zur Resultante b i und zerlege b i in 11 = i k || G H und 12 = k b || G J.

## §. 19.

## Häng- und Spannwerke.

I. Das einfache Hängwerk. Fig. 62. Bei demselben ist der Balken A B in C mittelst der Hängsäule mit dem Knotenpunkte D der beiden Streben D A und D B verbunden und an seinen Enden unterstützt. Von der bei C konzentrirten Last 2 P entfällt auf jeden der beiden Stützpunkte, wegen A C = C B, die Hälfte, also P.

Fig. 62.

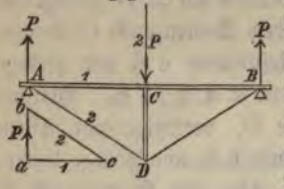



Im Kräfteplane ist zunächst der Stützendruck a b = P zerlegt in 1 || A C und 2 || A D. Im Knoten C setze man 2 P = a d mit 1 zur Resultante c d zusammen und zerlege dieselbe in 3 || C D und 5 || C B. Da endlich die auf den Knoten D wirkenden Kräfte 2, 3 und 4 im Gleichgewichte stehen, also ein geschlossenes Kräftedreieck geben müssen, so ist b e = 4.

Wegen der symmetrischen Anordnung des Hängwerkes ist offenbar 2 = 4 und 1 = 5. Berücksichtiget man nun, daß die Zugstange C D den Zug 2 P direkt aufnehmen muß, so wäre zur Ermittlung [illegible] Kräfte das Kräftedreieck a b c ausreichend gewesen.

II. Das einfache Spannwerk. Fig. 63. Dasselbe bildet offenbar ein umgekehrtes Hängwerk, weshalb die einzelnen Stäbe desselben die gerade entgegengesetzte Anspruchnahme als beim Hängwerke erfahren. Da überdies die Stütze C D den bei C konzentrirten Druck 2 P direkt aufnehmen muß und die Kräfte 1 und 5, 2 und 4 wegen der symmetrischen Anordnung der Stäbe gleich sind, so wurde bloß das Kräftedreieck a b c konstruirt.

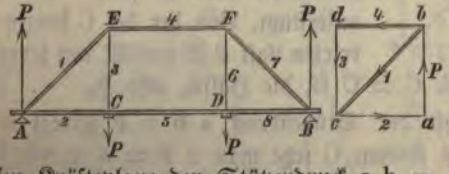
Fig. 63.




Anmerkung. Denkt man sich in den beiden vorhergehenden Fällen die Last 2 P statt in C konzentrirt über die ganze Länge des Balkens A B gleichförmig vertheilt, so kommt auf A C und C B je die Hälfte der ganzen Last, also der Betrag P. Von der Belastung P des Feldes A C kommt auf A und C je $\frac{P}{2}$ und von der Belastung P des Feldes B C kommt ebenso auf C und B je $\frac{P}{2}$. In A und B wirkt also je der Stützendruck $\frac{P}{2}$ und in C die Kraft $\frac{P}{2}+\frac{P}{2}$ also P. Der Kräfteplan wird dann selbstverständlich nur halb so groß ausfallen als oben, d. h. bei gleichmäßiger Belastung des Balkens A B trägt das Häng- oder Spannwerk doppelt so viel, als wenn die Last in seiner Mitte konzentrirt ist.

III. Das doppelte Hängwerk. Fig. 64. Wird der Tragbalken A B in zwei Punkten C und D aufgehängt und in diesen Punkten je mit P belastet, so wird bei symmetrischer Anordnung auf A und B je der Stützendruck P übertragen. Man zerlege daher im Kräfteplane den Stützendruck a b = P in 1 || A E und 2 || A C, zerlege hierauf die innere Kraft 1 (bei umgekehrter Pfeilrichtung) in 4 || E F und 3 || E C, und bilde schließlich für den Knotenpunkt C aus den auf denselben einwirkenden Kräften P, 2, 3 und 5 das Kräftefiereck a b c d, so ist d b = 5. Selbstverständlich ist, wegen der Symmetrie 4 = 7, 2 = 8 und 3 = 6.

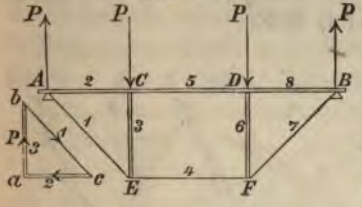
Fig. 64.




IV. Das doppelte Spannwerk. Fig. 65. Dasselbe wird wieder Umkehrung des doppelten Hängwerkes erhalten, weshalb auch die

Kräfte in den gleichnamigen Stäben beider Konstruktionen gleiche Größe aber entgegengesetzte Richtung erhalten. Da nun nach Nr. III. die Kräfte 2, 5 und 8 bei symmetrischer Anordnung der Stäbe gleiche Größe und Richtung haben und sich auch von 4 nur durch die entgegengesetzte Richtung unterscheiden, so genügt, wegen $1 = 7$ und $3 = 6 = P$, das Kräftedreieck a b c zur Bestimmung aller der Stabspannungen.

Fig. 65.




---

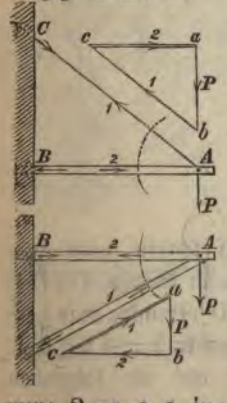
Analog lassen sich die mehrfachen Häng- und Spannwerke behandeln; da sie jedoch bereits als einfache Fachwerk- oder Gitterträger aufzufassen sind, so wollen wir sie nicht gesondert behandeln.

## §. 20.

## Einseitig unterstützte Träger oder Freiträger.

I. Der einfachste Freiträger. Fig. 66. Bei demselben ist der bei A belastete Balken mittelst der Hängestange A C aufgehängt und bei B befestigt. Hierbei zerlegt sich P direkt in die Spannungen 1 und 2 und zwar bestimmt 1 eine Zugspannung, dagegen 2 eine Druckspannung.

Fig. 66 und 67.

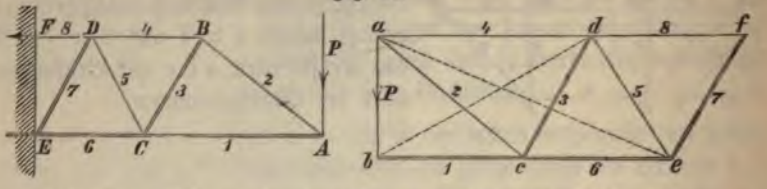



Gerade umgekehrt gestaltet sich die Anspruchnahme in Fig. 67, wo der Balken A B von unten gestützt wird.

II. Der fachwerkförmige Freiträger. (Fig. 68.) Da hier nur die im Punkte A angehängte Last P als äußere Kraft auftritt, so mache man im Kräfteplane zunächst a b = P und zerlege P, um die Spannungen 1 und 2 zu erhalten, in die Komponenten 1 ∥ A C und 2 ∥ A B. Zum Knotenpunkte B übergehend, zerlege man die Spannung 2 = a c in die Spannungen 3 ∥ B C und 4 ∥ B D; hierauf vereinige man in Betreff des Knotenpunktes C die bereits e

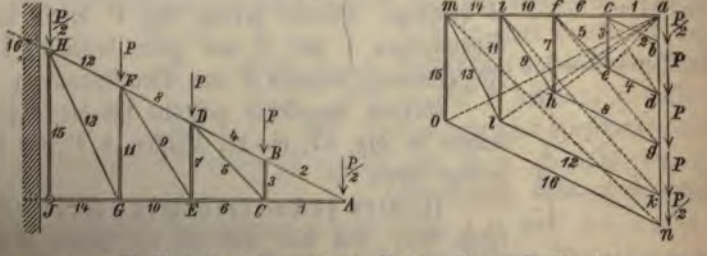
Spannungen 1 und 3 zur Resultante b d und zerlege dieselbe in 5 || C D und 6 = b e || C E. Schließlich setze man, bezüglich des Knotenpunktes D die Spannungen 4 und 5 zur Resultante e a zusammen, und zerlege dieselbe in 8 = a f || D F und 7 = e f || D E.

Fig. 68.




III. Das Perrondach. Fig. 69. Dieses Dach ist offenbar auch als fachwerkförmiger Freiträger zu behandeln. Bezeichnen wir die auf jedes der vier Felder des Sparrens A H entfallende lothrechte Belastung mit P, so kommt hiervon auf die äußersten Punkte A und H je der Betrag $\frac{P}{2}$ und auf jeden der Zwischenpunkte B, D und F der Betrag P. Man mache daher im Kräfteplane a b $= \frac{P}{2}$ und zerlege zunächst a b in 1 = a c || A C und 2 = b c || A B. Nun vereinige man für B die Spannung 2 mit P = b d zur Resultante d c und zerlege dieselbe

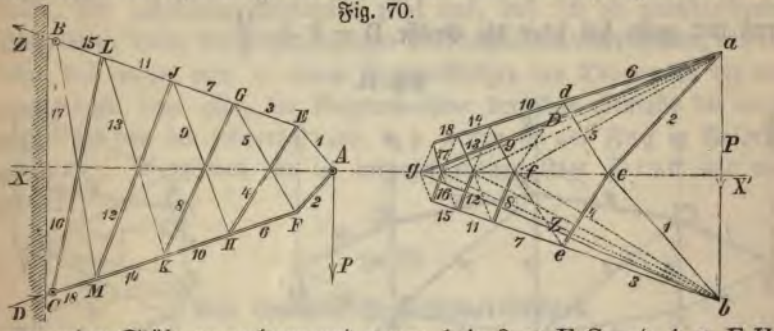
Fig. 69.




= c e || B C und 4 = e d || B D; hierauf schreite man zum O, vereinige 1 mit 3 zu e a und zerlege e a in 6 = a f || C E e f || C D. Bezüglich des Knotenpunktes D vereinige man nun P = d g zur Resultante f g und zerlege g f in 7 = f h || D E g || D F. Analog bestimme man die auf die folgenden E, F, G und H wirkenden Kräfte: 9 = h i, 10 = a i, k, 13 = l m, 14 = a m, 15 = m o und 16 = o n.

IV. Der gitterförmige Freiträger. Fig. 70. Derselbe sei bloß bei A mit P belastet, bei B und C befestigt und in Bezug auf die Horizontale A X symmetrisch gestaltet. Selbstverständlich wird man im Kräfteplane zunächst mit der Zerlegung der äußeren Kraft P = a b in Richtung der Stäbe A E und A F beginnen, wodurch man die inneren Kräfte 1 und 2 erhält. Jede derselben ist nun in Richtung der beiden

Fig. 70.




angrenzenden Stäbe zu zerlegen und zwar: 1 in 3 || E G und 4 || E H sowie 2 in 5 || F G und 6 || F H.

Man gelangt jetzt zum Knotenpunkte G, hat somit zunächst die schon bekannten Kräfte 3 und 5 zu vereinigen und die Resultante in die Kräfte 7 und 8 zu zerlegen. Dies geschah im Kräfteplane, indem 3 = b e mit e f = 5 zur Resultante f b vereinigt und diese in 7 || G J und 8 || G K zerlegt wurde. Geht man nun analog bei der Bestimmung der Stabspannungen an den folgenden Knotenpunkten H, J, K, .... vor, so erhält man den zur Axe X X' symmetrisch gelegenen Kräfteplan, von dem also nur die Hälfte zu konstruiren wäre. Es ist nämlich wegen der symmetrischen Anordnung der Stäbe in Bezug auf P und die Axe A X, 1 = 2, 3 = 6, 4 = 5 u. s. f.; doch sind die gleichen Anspruchnahmen dem Zeichen nach gerade entgegengesetzt, d. h. die mit einfachen Linien bezeichneten Stäbe werden auf Zug, dagegen die mit doppelten Linien markirten Stäbe auf Druck beansprucht.

## §. 21.

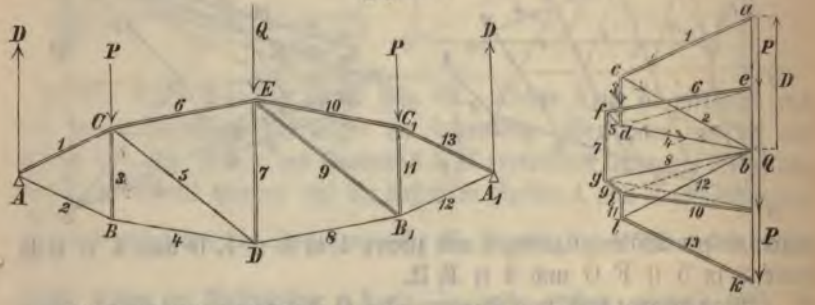
## Das einfache Fachwerk allgemeinster Form bei konstanter Belastung.*)

In Fig. 71 ist ein solcher Träger verzeichnet. Er besteht aus zwei

*) Um die Figur möglichst kompendiös und doch deutlich zu machen, wurden nur 4 Felder gewählt.

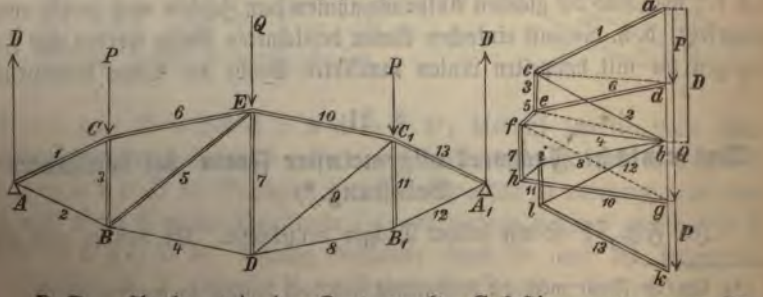
polygonalen Gurtungen A C E . . . . und A B D . . . . , welche durch Vertikalstäbe in vier ungleiche aber zur Mittellinie E D symmetrische Felder getheilt wird, in denen die Diagonalen gleiche Richtung haben. Es wurde angenommen, daß nur die oberen Knotenpunkte belastet sind, und daß den zur Mitte symmetrisch gelegenen Knotenpunkten gleiche Belastungen zukommen. Die beiden Stützendrücke bei A und $A_1$ sind daher gleich groß und zwar hat jeder die Größe $D = P + \frac{Q}{2}$.

Fig. 71.




Wird nun im Kräfteplane a b = D gemacht und D in Richtung der Stäbe A C und A B zerlegt, so erhält man zunächst die in diesen Stäben herrschenden Spannungen 1 und 2. Auf den Knotenpunkt B übergehend, zerlege man die Spannung 2 = b c in 3 || B C und 4 || B D. Hierauf schreite man zum Knotenpunkte C, vereinige zunächst 3, 1 und P zur Resultante e d und zerlege dieselbe in 5 || C D und 6 || C E. Für den folgenden Knotenpunkt D setze man die schon bekannten Spannungen 4 und 5 zur Resultante f b zusammen und zerlege dieselbe in 7 || D E

Fig. 72.




D $B_1$. Analog wie im Knotenpunkte C bestimme man nun für

den Knoten E aus den bekannten Kräften Q, 6 und 7 die Kräfte 9 und 10, ferner für $B_1$ aus 8 und 9 die Spannungen 11 und 12 und berücksichtige endlich, daß 13 die Schlußlinie im Kräftevieleck der im Knotenpunkte $C_1$ angreifenden vier Kräfte: 11, 10, P und 13 bilden muß.

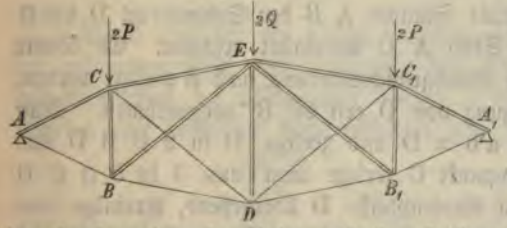
Der durch Fig. 72 versinnlichte Träger unterscheidet sich von dem vorhergehenden nur dadurch, daß die Diagonalen die entgegengesetzte Lage haben. Der zugehörige Kräfteplan zeigt uns, daß sich die gleichbezifferten Diagonalen durch die entgegengesetzte Anspruchnahme unterscheiden, woraus folgt, daß wenn man in einem Fachwerkträger den Diagonalen die entgegengesetzte Lage gibt, die Anspruchnahme derselben ebenfalls die entgegengesetzte von der früheren wird, d. h. waren sie auf Zug in Anspruch genommen, so erleiden sie in entgegengesetzter Lage Druck und umgekehrt.

## §. 22.

## Der kombinirte Fachwerkträger.

Denkt man sich die beiden einfachen Fachwerkträger Fig. 71 und 72 so übereinander gelegt und vereinigt, daß dadurch der kombinirte Fachwerkträger Fig. 73 entsteht, so ist die Annahme zulässig, daß der kombinirte Fachwerkträger so viel trägt, als die beiden einfachen Fachwerkträger zusammengenommen.

Fig. 73.




Soll demnach die Anspruchnahme des kombinirten Fachwerkträgers Fig. 73 ermittelt werden, so denkt man sich denselben in zwei einfache Träger Fig. 71 und 72 zerlegt, bestimme die Spannungen jedes einzelnen unter der Annahme, daß auf ihn nur die Hälfte von der Belastung des zusammengesetzten Trägers entfällt, denke sich dann die einfachen Träger wieder vereinigt und erhält schließlich die Spannungen der Gurtungsglieder und Vertikalstäbe im kombinirten Träger durch Addition der gleichbezifferten Spannungen in den einfachen Trägern. Auf dieselbe Art ließen sich selbstverständlich Fachwerkträger mit beliebig vielen Feldern behandeln.

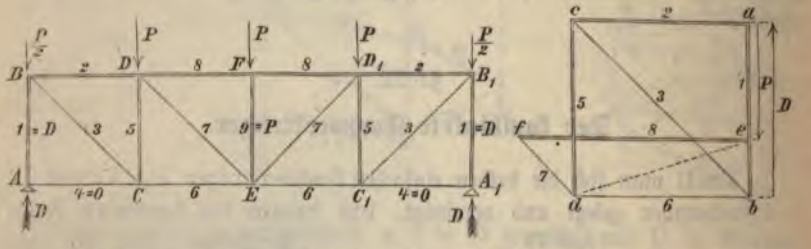
## §. 23.

## Das Fachwerk mit parallelen Gurtungen und konstanter Belastung.

Der in Fig. 74 dargestellte Träger ist zur Mittellinie E F symmetrisch angeordnet und erhält pro Feld die gleichförmig vertheilte Belastung P, so daß auf die mittleren Knotenpunkte D, F und $D_1$ je der Druck P, dagegen auf die Endpunkte B und $B_1$ je der Druck $\frac{P}{2}$ thätig ist. Als aktiver Stützendruck bei A und $A_1$ ergibt sich somit

$$D = D_1 = 2\,P - \tfrac{1}{2}\,P = 1{,}5\,P.$$

Fig. 74.




Offenbar hat der vertikale Ständer A B den Stützendruck D direkt aufzunehmen, weshalb der Stab A C unbelastet erscheint. Es könnte daher der Stützpunkt A, ohne Gleichgewichtsstörung, nach B verlegt werden, und ist somit die Kraftzerlegung von D erst bei B vorzunehmen. Man mache daher im Kräfteplane a b = D und zerlege D in 2 || B D und 3 || B C. Für den Knotenpunkt C zerlege man nun 3 in 5 || C D und 6 || C E; hierauf zum Knotenpunkte D übergehend, vereinige man zunächst die schon ermittelten Kräfte 5 und 2 mit P zur Resultante e d und zerlege dieselbe in 7 || D E und 8 || D F. Der mittlere Ständer F E hat offenbar den auf seinen Kopfpunkt F wirksamen Druck P ganz allein aufzunehmen, es ist in ihm also die Druckspannung 9 = P thätig. Da ferner der Träger zur Mittellinie F E vollkommen symmetrisch ge-

ſo ist selbstverständlich die Anspruchnahme der Stäbe auf der

ganz übereinstimmend mit der Anspruchnahme der gleich-

e auf der linken Trägerhälfte.

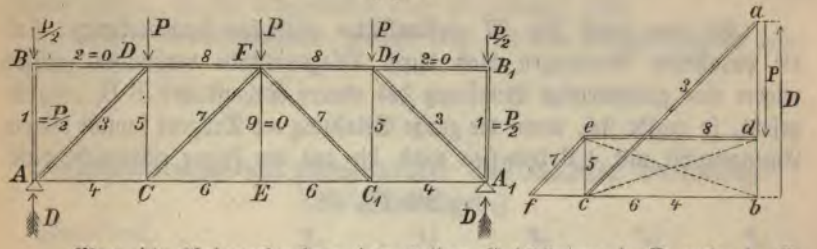
Fig. 75 dargestellte Träger unterscheidet sich von dem vori-

entgegengesetzte Lage der Diagonalstäbe, weshalb dieselben,

ehenden Kräfteplane erhellet, gegenüber den gleich-

bezifferten Diagonalen des vorhergehenden Trägers die entgegengesetzte Anspruchnahme erfahren.

Fig. 75.

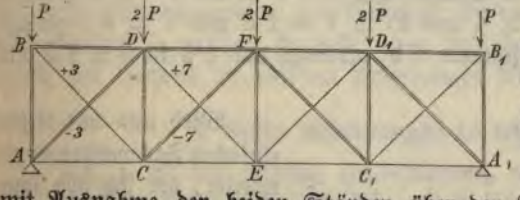



Was die Anspruchnahme der beiden Endständer A B und $A_1$ $B_1$ anbelangt, so ist leicht einzusehen, daß — weil der Stützendruck D direkt von 3 und 4 aufgenommen wird — auf A B oder $A_1$ $B_1$ nur die Belastung des oberen Kopfpunktes, d. i. der Druck $P/_2$ wirkt. Die Stäbe B D und $B_1$ $D_1$ erscheinen unbelastet; dasselbe gilt endlich auch vom mittleren Ständer E F, denn der auf F entfallende Druck wird von den beiden Streben F C und F $C_1$ aufgenommen.

## Der aus Fig. 74 und 75 kombinirte Fachwerkträger.

Denkt man sich die beiden einfachen Träger Fig. 74 und 75 derart zusammengestellt und vereinigt, daß sich die gleichbezifferten Stücke mit Ausnahme der Diagonalen decken, so erhält man hieraus den kombinirten oder doppelten Fachwerkträger Fig. 76, dessen Spannungen man erhält, wenn man die Spannungen der sich deckenden Glieder addirt, die der Diagonalen aber unverändert läßt. Da nun die Vertikalständer in den beiden einfachen Trägern, mit Ausnahme der beiden Ständer über den Auflagern, entgegengesetzte Anspruchnahme erfahren, so ergibt sich für jeden der mittleren Ständer des zusammengesetzten Trägers nur die Druckspannung P, während jeder seiner beiden Endständer den Druck 2 P erfährt.

Fig. 76.

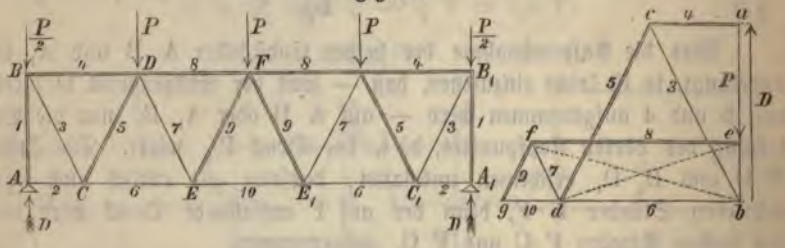


## §. 24.

## Fachwerkträger mit parallelen Gurtungen ohne Vertikalstäben.

Bei dem durch Fig. 77 versinnlichten einfachen Fachwerkträger sind die parallelen Gurtungen bloß durch Diagonalstäbe verbunden. Wird wieder eine gleichförmige Belastung des oberen Rahmstückes B $B_1$ vorausgesetzt, so ergibt sich, wenn die ganze Belastung des Trägers sammt seinem Eigengewichte mit 4 P bemessen wird, die aus der Figur ersichtliche Last-

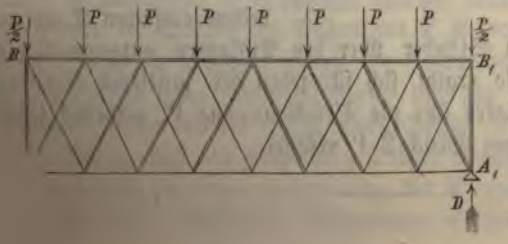
Fig. 77.




vertheilung, welcher der Stützendruck $D = 2\,P - \frac{P}{2} = \frac{3}{2}\,P$ entspricht. Dieser aktive Stützendruck wird offenbar direkt vom Ständer A B aufgenommen und auf B übertragen, weshalb A C keine Anspruchnahme erfährt.

Im Kräfteplane ist der auf den Knotenpunkt B übertragene Stützendruck D in die Stabspannungen 3 ∥ B C und 4 ∥ B D zerlegt worden. Hierauf wurden aus 3 die Spannungen 5 = c d und 6 = d b gebildet, die Resultante d e aus 5, 4 und P in 7 = f d und 8 = e f zerlegt, sodann 6 und 7 zur Resultante f b vereinigt und f b in 9 = f g und 10 = g b zerlegt.

Fig. 78.




Wird nun mit diesem einfachen Fachwerkträger ein zweiter, der sich von ihm, bei gleicher Belastungsweise, nur durch die entgegengesetzte Lage der Diagonalstangen unterscheidet, derart vereinigt, daß sich die gleichnamigen Gurtungen decken,

so erhält man den zweifachen oder doppelten Fachwerkträger Fig. 78, der doppelt so viel als ein einfacher trägt, und dessen Spannungen wieder erhalten werden, wenn man die Spannungen der sich deckenden Gurtungsglieder addirt, die der Diagonalen aber unverändert läßt.

Weitere Kombinationen werden uns bei den Brückenträgern vorkommen.

---

## Fachwerkträger mit permanenter und mobiler Belastung. (Brückenträger.)

### §. 25.

### Einfluß der mobilen Belastung auf Fachwerke.

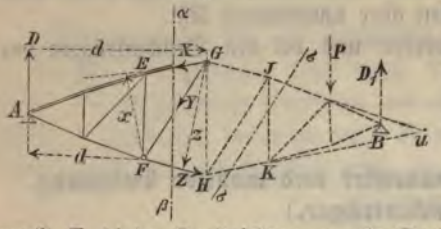
Die Brückenträger haben außer dem Eigengewichte, welches die permanente oder beständige Belastung bildet, auch noch die mobile oder bewegliche Belastung der ganzen Brücke zu tragen, welche durch die über die Brückenbahn fortschreitenden größten Verkehrslasten bemessen wird. Das Eigengewicht der ganzen Brücke denkt man sich, wie bereits erwähnt wurde, auf sämmtliche Brückenträger gleichförmig vertheilt und kann daher die durch dasselbe in den einzelnen Querschnitten eines Trägers hervorgerufenen Momente und Transversalkräfte nach §. 8 sehr leicht bestimmen. Anders ist es mit der Einwirkung der mobilen Belastung. Es muß zunächst untersucht werden, bei welcher Stellung der mobilen Last in den einzelnen Konstruktionstheilen der Brückenträger das Maximum der Anspruchnahme erreicht wird. Zu diesem Behufe wollen wir vorerst den Einfluß bestimmen, welchen eine Einzellast auf den fraglichen Konstruktionstheil ausübt, je nachdem sie rechts oder links von demselben angenommen wird, und hiernach die weiteren Folgerungen bilden.

#### I. Größte Anspruchnahme der Gurtungen.

Um z. B. den Einfluß zu bestimmen, welchen irgend eine rechts von der Schnittfläche $\alpha\,\beta$, Fig. 79, angebrachte Last, Einzellast P, auf das Gurtungsglied E G ausübt, d. h. ob sie in E G eine Zug- oder Druckspannung hervorbringt, denke man sich durch den Schnitt $\alpha\,\beta$ den Träger in zwei Theile zerlegt und an den Schnittstellen die Kräfte X, Y, Z, angebracht, welche das Gleichgewicht wieder herstellen. Auf das linke Fragment A E F des Trägers wirken nun die drei Spannungen X, Y

und Z und der durch P in A hervorgerufene Stützendruck D; sollen sich aber diese vier Kräfte das Gleichgewicht halten, so muß bekanntlich die algebraische Summe der statischen Momente dieser Kräfte in Bezug auf einen beliebigen in der Ebene dieser Kräfte gelegenen Drehpunkt gleich Null sein.

Fig. 79.

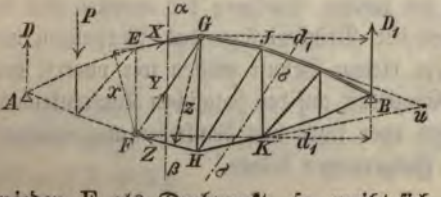



Um aber die beiden Spannungen Y und Z zu eliminiren, wählt man den Durchschnittspunkt F dieser Kraftrichtungen als Drehpunkt und erhält hierfür, wenn man die Hebelarme von D und X in Bezug auf F beziehungsweise mit d und x bezeichnet und das Moment der rechts drehenden Kraft als positiv, also der links drehenden als negativ annimmt, die Gleichgewichtsbedingung

$$D \cdot d - X \cdot x = 0, \text{ woraus } X = \frac{D \cdot d}{x}.$$

Hiernach wird, der Pfeilrichtung von X entsprechend, durch P in dem oberen Gurtungsstücke E G eine Druckspannung hervorgerufen, und wir können nun folgern: daß alle rechts von der Schnittfläche α β angebrachten Belastungen in dem betreffenden Gurtstücke Druckspannungen erzeugen.*)

Fig. 80.




Den Einfluß, welchen eine links von der Schnittfläche α β angebrachte Last P auf dasselbe Gurtstück E G ausübt, kann man, analog dem vorigen Falle, am einfachsten aus Fig. 80 entnehmen. Wählt man nämlich wieder F als Drehpunkt, so ergibt sich als Gleichgewichtsbedingung des rechts vom Schnitte liegenden Fragmentes:

$$-D_1 \cdot d_1 + X \cdot x = 0, \text{ woraus } X = \frac{D_1 \cdot d_1}{x}.$$

*) Richtung der inneren Kraft im fraglichen Konstruktionstheile kann Zweifel entstehen; denn dieselbe muß den entgegengesetzten haben als der in Betracht genommene Stützendruck, weil sonst gegen Drehung bestehen könnte.

Hiernach ist also, der Pfeilrichtung entsprechend, E G wieder gedrückt; es bringt also auch jede links von dem Gurtstücke E G angebrachte Last in E G eine Druckspannung hervor und wir können sagen:

**Die obere Gurtung ist nur auf Druck beansprucht und erreicht das Maximum der Druckspannung bei voller Belastung des Trägers.**

Analog werden wir jetzt die Maximalanspruchnahme der unteren Gurtung bestimmen. Betrachten wir nämlich das beliebige Gurtstück F H zuerst unter dem Einfluße der rechts davon liegenden Einzellast P, Fig. 79, wählen G als Drehpunkt, und bezeichnen hierfür die Hebelarme von D und Z mit d und z, so ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung:

$$D \cdot d - Z \cdot z = 0, \text{ woraus } Z = \frac{D \cdot d}{z}.$$

Die Pfeilrichtung von Z bedingt also eine Zugspannung des Gurtungsgliedes F H. Liegt die Einzellast P, Fig. 80, links von F H, so gilt für denselben Drehpunkt G als Gleichgewichtsbedingung des rechts von der Schnittfläche $\alpha\ \beta$ liegenden Fragmentes:

$$-D_1 \cdot d_1 + Z \cdot z = 0, \text{ woraus } Z = \frac{D_1 \cdot d_1}{z}.$$

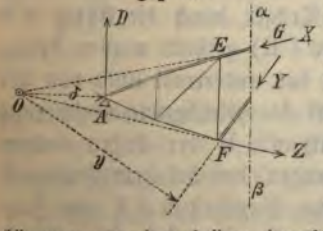
Die Anspruchnahme von F H ist also wieder eine Zugspannung, und wir gelangen zu der Folgerung:

**Die untere Gurtung ist nur auf Zug beansprucht und erreicht das Maximum der Zugspannung bei voller Belastung des Trägers.**

### II. Größte Anspruchnahme der Füllungsglieder.

Unter den Füllungsgliedern sind hier die Verbindungselemente, welche die obere Gurtung mit der untern vereinigen, verstanden, also in Fig. 79 die Vertikal- und Diagonalstangen.

Fig. 81.




Um zunächst die Anspruchnahme Y einer Diagonalstange z. B. jener F G, Fig. 79, zu erhalten, denke man sich dieselbe zuerst durch die rechts von der Schnittfläche $\alpha\ \beta$ liegende Einzellast P affizirt, und stelle die Gleichgewichtsbedingung für das linke Fragment, Fig. 81, des Trägers bezüglich des Drehpunktes 0 auf, in welchem sich die Verlängerungen der beiden durchschnittenen Gurtungsglieder E G und F H treffen. Bezeichnet man mit y den Hebelarm für Y, und mit $\delta$

für den durch P hervorgerufenen Stützendruck D in Bezug auf den Drehpunkt 0, so ist Gleichgewicht, wenn

$$-D \cdot \delta + Y \cdot y = 0, \text{ oder } Y = \frac{D \cdot \delta}{y}.$$

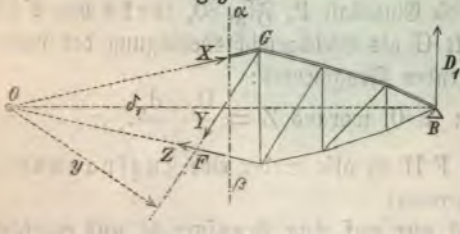
Mit Rücksicht auf die Pfeilrichtung wird also F G durch jede rechts von F G angebrachte Einzellast auf Druckfestigkeit beansprucht.

Wird nun die Last P links von der Schnittfläche $\alpha\ \beta$ angebracht, so ergibt sich für denselben Drehpunkt 0 als Gleichgewichtsbedingung des rechten Fragmentes, Fig. 82, wenn der Hebelarm des durch P hervorgerufenen Stützendruckes $D_1$ mit $\delta_1$ bezeichnet wird,

$$-D_1 \cdot \delta_1 + Y \cdot y = 0.$$

Die Pfeilrichtung von Y bedingt also in G F eine Zugspannung; durch alle links von der Diagonalstange F G angebrachten Lasten wird daher dieselbe auf Zug beansprucht.

Fig. 82




Da nun die auf entgegengesetzten Seiten der Diagonalstange liegenden Lasten diese Stange entgegengesetzt beanspruchen, so ergibt sich mit Rücksicht auf das Vorstehende die Folgerung:

Eine Diagonalstange ist am stärksten beansprucht, wenn das Fachwerk auf der einen Seite derselben gänzlich belastet, auf der andern aber ganz entlastet ist.

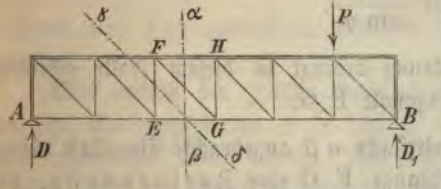
Dasselbe Gesetz ergibt sich auch für die Vertikalstangen des Fachwerkes. Wollte man z. B. die größte Anspruchnahme der Stange J K, Fig. 79, ermitteln, so denke man sich den Träger durch die Ebene $\sigma\ \sigma$ so zerschnitten, daß nur 3 Stangen (worunter J K) getheilt werden, bringe nun wieder eine Einzellast P einmal rechts, das anderemal links von der betreffenden Stange an, und stelle beidemal die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung in Bezug auf den Schnittpunkt U der beiden andern Stangen auf. Man wird sich sofort überzeugen, daß bei dem Fachwerkträger, Fig. 79, die rechts von J K angebrachte Einzellast in J K eine Zugspannung, dagegen die links von J K angebrachte Einzellast, Fig. 80, in J K eine Druckspannung verursacht.

Wir erhalten somit bezüglich der Füllungsglieder des Fachwerkes den allgemeinen Satz:

**Ein Füllungsglied wird am stärksten in Anspruch genommen, wenn das Fachwerk auf der einen Seite desselben ganz belastet, auf der andern Seite desselben aber ganz entlastet ist.**

Zusatz: Bei Fachwerkträgern mit parallelen Gurtungen läßt sich die vorhin beschriebene Bestimmungsweise der größten Anspruchnahme der einzelnen Konstruktionstheile ebenfalls durchführen. Zwar liegt dann bei der Bestimmung der Anspruchnahme einer Diagonalstange der Durchschnittspunkt der beiden parallelen Gurte, also der Drehpunkt für die Momenten-Gleichung der Diagonalstange in unendlicher Entfernung, es werden somit die Hebelarme der in der Momentengleichung vorkommenden Kräfte unendlich groß, fallen jedoch gegen einander weg, und wird hierdurch jede Unbestimmtheit behoben.

Fig. 83.




Um z. B. den Einfluß zu bestimmen, welchen eine rechts von der Schnittfläche $\alpha\,\beta$, Fig. 83, angebrachte Einzellast P auf die Diagonalstange F G ausübt, denke man sich zunächst wieder durch den Schnitt $\alpha\,\beta$ die ganze Konstruktion in zwei Theile zerlegt, und nach Hinzufügung der Kräfte X, Y, Z für den linken Theil, Fig. 84, die Momentengleichung in Bezug auf den Durchschnittspunkt der beiden Kräfte X und Z als Drehpunkt aufgestellt. Würde der Drehpunkt O in der endlichen Entfernung x von der Schnittfläche $\alpha\,\beta$ liegen, so wäre der Hebelarm von Y durch $x \cdot \sin\varphi$ bestimmt. Denkt man sich aber O bis zum unendlich fernen Durchschnittspunkte der beiden Kräfte X und Z fortgerückt, also $x = \infty$, so wird der Hebelarm von Y gleich $\infty \cdot \sin\varphi$ und jener des durch P erzeugten Stützendruckes D gleich $\infty$.

Fig. 84.

Da nun für diesen unendlich fernen Durchschnittspunkt als Drehpunkt die Momente der Kräfte X und Z in Null übergehen, so ergibt sich zur Bestimmung von Y die Momentengleichung:

$$- D \cdot \infty + Y \infty \sin \varphi = 0,$$

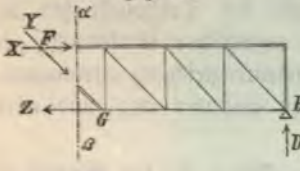
oder mit Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors $\infty$

$$- D + Y \sin \varphi = 0,$$

$$\text{woraus } Y = \frac{D}{\sin \varphi}.$$

Da hier Y rechts drehend wirkt, so muß offenbar, der Pfeilrichtung entsprechend, die durch P verursachte Anspruchnahme eine Zugspannung der Diagonale F G bedingen.

Fig. 85.




Auf analoge Weise erhält man für die Anspruchnahme, welche irgend eine links von der Schnittfläche $\alpha\ \beta$ angebrachte Einzellast in F G hervorbringt, aus Fig. 85, die Gleichgewichtsbedingung:

$$- D_1 \cdot \infty + Y \cdot \infty \cdot \sin \varphi = 0, \text{ woraus}$$

$$Y = \frac{D_1}{\sin \varphi}.$$

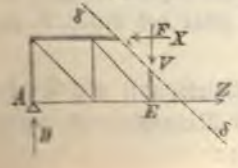
Die eingezeichnete Pfeilrichtung bedingt in diesem Falle offenbar eine Druckspannung der Diagonale F G.

Jede rechts von der Schnittfläche $\alpha\ \beta$ angebrachte Einzellast bringt in der durchschnittenen Diagonalstange F G eine Zugspannung, dagegen jede links von ihr angebrachte Einzellast in F G eine Druckspannung hervor. Die Diagonalstangen erfahren also auch beim Fachwerk mit parallelen Gurtungen die größte Anspruchnahme bei der größten einseitigen Belastung des Fachwerkes.

Dasselbe gilt auch für die Vertikalstangen.

Um z. B. die größte Anspruchnahme der dritten Vertikalstange E F, Fig. 83, zu bestimmen, führe man den Schnitt $\gamma\ \delta$ und untersuche zunächst den Einfluß einer rechts von $\gamma\ \delta$ angebrachten Einzellast P, die bei A den Stützendruck D hervorruft. Für den linken Theil, Fig. 86, ist alsdann, wenn wieder der unendlich ferne Schnittpunkt der Kräfte X und Z als Drehpunkt gewählt wird, als Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung:

Fig. 86.




$$- D \cdot \infty + V \cdot \infty = 0 \text{ oder } V = D.$$

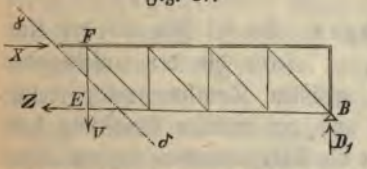
Da nun V und D entgegengesetzten Drehungssinn haben müssen, so muß offenbar V, der Pfeilrichtung zufolge, die Vertikalstange E F auf Druck beanspruchen.

Liegt dagegen die Einzellast P links vom Schnitte $\gamma\ \delta$ und ruft sie bei B den Stützendruck $D_1$ hervor, so muß, damit der Theil, Fig. 87, im Gleichgewichte bleibe, wieder

$$-D_1 \cdot \infty + V \cdot \infty = 0, \text{ oder } V = D_1 \text{ sein,}$$

und die dem $D_1$ entgegengesetzte Pfeilrichtung von V belehrt uns, daß die links von der Schnittfläche $\gamma\ \delta$ angebrachte Einzellast P in E F einen Zug verursacht.

Fig. 87.




Es werden also auch die Vertikalstangen durch rechts und links von ihnen liegende Lasten entgegengesetzt beansprucht, und erreichen somit ebenfalls die größte Anspruchnahme bei der größten einseitigen Belastung des Fachwerkes.

Was endlich die größte Anspruchnahme X und Z der beiden horizontalen Gurtungsglieder F H und E G, Fig. 83, anbelangt, so bietet dieser Fall zu keinen neuen Bemerkungen Veranlassung; sie werden nämlich, wie dies beim allgemeinen Fachwerk nachgewiesen wurde, am meisten beansprucht, wenn das ganze Fachwerk belastet ist. Da übrigens bei parallelen Gurtungen die Kräfte X und Z die einzigen Horizontalkräfte sind, welche auf den Theil, Fig. 84 oder 85, wirken, so muß offenbar für jeden Belastungszustand, damit keine Verschiebung in horizontaler Richtung eintreten könne,

$$-X + Z = 0 \text{ oder } X = Z \text{ sein.}$$

---

## Fachwerkträger für Eisenbahnbrücken.

### §. 26.

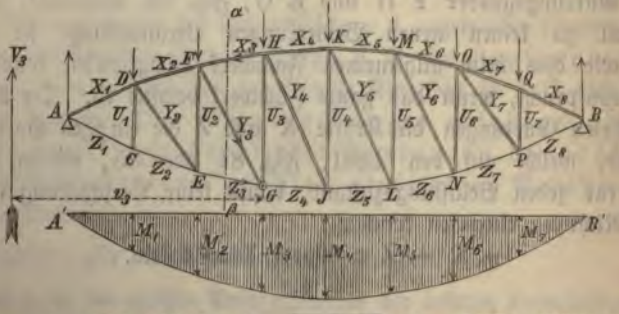
Allgemeiner Fall. Nach den im vorigen Paragraphe gewonnenen Ergebnissen wird es nun nicht schwer fallen, die größte Anspruchnahme der einzelnen Konstruktionstheile eines Fachwerkträgers zu bestimmen

Man ermittle zunächst den vom Eigengewichte und der größten mobilen Belastung der ganzen Brücke auf einen Brückenträger entfallenden Betrag, indem man, wenn n gleich starke, einfache Fachwerkträger die gesammte Last tragen sollen, das Eigengewicht der ganzen Brücke, sowie die einzelnen Axendrücke des schwersten, die Brückenbahn bedeckenden Lastzuges, durch n dividirt. Hierauf konstruire man nach §. 8 die vom Eigengewichte der Brücke und nach §. 9 die von der mobilen Belastung den einzelnen Knotenpunkten eines einfachen Fachwerkträgers zukommenden größten Transversalkräfte (V) und Momente (M).

Hat man dies bewerkstelligt, so schreite man nun zur Bestimmung der Spannungen in den Gurtungen.

Anspruchnahme der Gurtungen. Es sei Fig. 88 der einfache Fachwerkträger und $M_1$, $M_2$, $M_3$ ... seien die den aufeinander folgenden Knotenpunkten entsprechenden größten Totalmomente, welche durch Addition der vom Eigengewichte und der mobilen Belastung herrührenden Werthe erhalten werden. Um die Anspruchnahme irgend eines Gurtungsgliedes z. B. jenes F H zu ermitteln, denke man sich durch den Schnitt $\alpha$ $\beta$ den Träger in zwei Theile zerlegt und den rechten Theil

Fig. 88.




durch die an den Schnittflächen der durchschnittenen Stäbe thätigen inneren Kräfte $X_3$, $Y_3$, $Z_3$ ersetzt. Bezeichnet man die auf das linke Fragment thätige Transversalkraft der äußeren Kräfte mit $V_3$ und wählt, um $X_3$ allein zu erhalten, den Schnittpunkt G der beiden anderen Spannungen $Y_3$ und $Z_3$ als Drehpunkt, so muß zur Sicherung gegen Drehung des betrachteten Trägerfragmentes die Gleichung bestehen:

$$V_3 \cdot v_3 - X_3 \cdot x_3 = 0, \text{ woraus } X_3 = \frac{V_3 \cdot v_3}{x_3}.$$

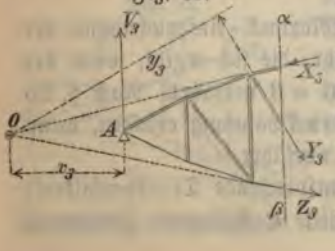
Das Produkt $V_3 \cdot v_3$ stellt aber das Moment $M_3$ der äußeren auf das Fragment A $\alpha$ $\beta$ thätigen Kräfte bezüglich des Punktes G vor; es ist also $X_3 = \frac{M_3}{x_3}$.

Analog lassen sich die Spannungen aller übrigen Gurtungsglieder bestimmen; jene der Gurtungsglieder A C und A D am Auflager, ergeben sich aber am einfachsten durch direkte Zerlegung des größten Stützendruckes, der sich offenbar ergibt, wenn der Lastzug von B bis A auffährt, so daß das erste Rad der vorderen Lokomotive unmittelbar über A steht.

Anspruchnahme der Diagonalen. Die Maximalspannung der Füllungsglieder ergibt sich, dem vorigen Paragraphe zufolge, bei einseitiger mobiler Belastung des Trägers, d. h. wenn nur das größere Fragment des Trägers vom betreffenden Füllungsgliede bis zum entfernteren Stützpunkte durch die mobile Last bedeckt ist. Da aber das auf den Träger entfallende Eigengewicht der Brücke unverändert bleibt, so wird man am besten thun, zunächst die Spannungen zu bestimmen, welche die einzelnen Füllungsglieder durch dieses Eigengewicht erfahren, und dann erst zur Ermittelung der Maximalspannungen schreiten, welche durch die mobile Last in den Füllungsgliedern verursacht werden. Durch Addition der beiden Spannungen mit Rücksicht auf das Vorzeichen erhält man dann die totale Anspruchnahme der einzelnen Füllungsglieder. Was vorerst die Bestimmung der Anspruchnahme des Trägers durch das auf ihn entfallende Eigengewicht der Brücke anbelangt, so kann diese am einfachsten gerade so vorgenommen werden, wie dies bei den Fachwerkträgern mit konstanter Belastung geschah, weshalb wir darauf nicht weiter eingehen wollen, sondern uns gleich zur Ermittelung der Spannungen in den Füllungsgliedern durch die mobile Belastung wenden.

Um z. B. die größte Anspruchnahme $Y_3$ der Diagonale F G, Fig. 88, im dritten Felde durch die mobile Last zu erhalten, muß nach §. 9 der Lastzug, mit zwei der schwersten Lokomotiven an der Spitze, von rechts kommend bis zum Schnitte $\alpha\beta$ vorfahren. Man bestimme daher nach §. 9 die dieser Radstellung entsprechende Transversalkraft $V_3$, und berücksichtige, daß $V_3$, wegen der einseitigen Belastung, als Stützendruck am Auflager A wirken wird.

Fig. 89.



Soll sich nun das Fragment A $\alpha$ $\beta$, Fig. 89, unter dem Einfluße der auf dasselbe thätigen Kräfte $X_3$, $Y_3$, $Z_3$ und $V_3$ im Gleichgewichte befinden, so muß die algebraische Summe der statischen Momente dieser Kräfte in Bezug auf irgend einen in der Ebene dieser Kräfte liegenden Punkt gleich Null sein. Wählen wir, um $X_3$ und $Z_3$ zu eliminiren, den Schnittpunkt O dieser beiden Kräfte als Drehpunkt, so ergibt sich in Bezug auf O die Gleichgewichtsbedingung:

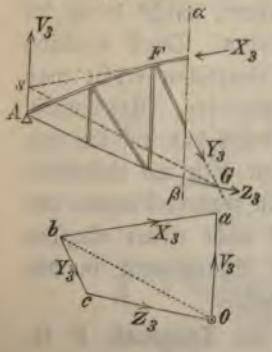
$$-V_3 \cdot v_3 + Y_3 \cdot y_3 = 0, \text{ woraus } Y_3 = \frac{V_3 \cdot v_3}{y_3}.$$

Da nun $V_3$ links drehend wirkt, so muß offenbar $Y_3$ rechts drehend wirken, somit in Folge der Pfeilrichtung die größte Anspruchnahme von $Y_3$ in einer Zugspannung bestehen.

---

Zusatz. Fällt der Schnittpunkt O der beiden Kräfte $X_3$ und $Z_3$ über die Zeichnungsfläche hinaus, so kann man die Bestimmung von $Y_3$ nach §. 14 vornehmen, indem man die in A, Fig. 90, angreifende Transversalkraft $V_3$ in Richtung der drei Kräfte $X_3$, $Y_3$ und $Z_3$ zerlegt. Man verlängere daher eine derselben, z. B. $X_3$ bis zum Schnitt s mit $V_3$, so muß die Resultante von $V_3$ und $X_3$ im Gleichgewichtszustande mit der Resultante von $Y_3$ und $Z_3$ zusammenfallen, also die Richtung G s haben. Man mache daher seitwärts o a = $V_3$, führe durch die Endpunkte von $V_3$ Parallele zu $X_3$ und G s und zerlege o b, d. i. die Resultirende von $V_3$ und $X_3$, in die Kräfte $Y_3'$ und $Z_3'$.

Fig. 90.




---

Wir haben vorhin gefunden, daß die Maximal-Anspruchnahme der
ale F G in einer **Zug**spannung besteht, die sich ergibt, wenn der
**rechts** kommend bis zum Schnitt $\alpha$ $\beta$ vorfährt. Nach §. 25
ieselbe Diagonale die größte **Druck**spannung erleiden, wenn
von **links** kommend bis $\alpha$ $\beta$ vorfährt.
m die dieser Radstellung entsprechende Transversalkraft
t das rechts vom Schnitte $\alpha$ $\beta$ liegende Fragment,

Fig. 91.

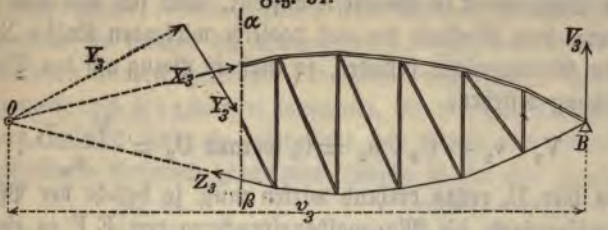



Fig. 91, auf welches außer $X_3$, $Y_3$ und $Z_3$ blos der in B thätige Stützendruck $V_3$ wirkt, so erhalten wir als Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung bezüglich des Punktes 0 die Gleichung:

$$-V_3 \cdot v_3 + Y_3 \cdot y_3 = 0, \text{ woraus } Y_3 = \frac{V_3 \cdot v_3}{y_3}.$$

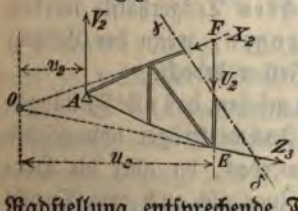
Die Diagonale F G wird demnach am stärksten auf Zug oder Druck beansprucht, je nachdem der Lastzug beziehungsweise von rechts oder links kommend bis zum Schnitte $\alpha$ $\beta$ vorfährt. Analog verhalten sich alle Diagonalen in der linken Trägerhälfte.

In der rechten Trägerhälfte ergibt sich dagegen, wegen der entgegengesetzten Lage der Diagonalen zur Mitte, das entgegengesetzte Verhalten in Bezug auf Zug und Druck; d. h. die Diagonalen in der rechten Trägerhälfte werden am stärksten **gezogen**, wenn alle **links** von ihnen befindlichen Felder belastet sind, dagegen am stärksten **gedrückt**, wenn alle **rechts** von ihnen liegenden Felder belastet werden.

Wenn in irgend einem Felde, z. B. im dritten, statt der links ansteigenden Diagonale F G eine rechts ansteigende E H, Fig. 88, angebracht würde, so möchte sie sich offenbar entgegengesetzt als wie F G verhalten, also mit jener M N, welche zu ihr symmetrisch liegt, gleiche Anspruchnahme erfahren.

Anspruchnahme der Vertikalen. Nach §. 25 erfahren auch die Vertikalen die größte Anspruchnahme bei der größten einseitigen Belastung des Fachwerkes. Ist z. B. die Maximalanspruchnahme $U_2$ der zweiten Vertikalen E F, Fig. 92, zu bestimmen, so muß der Lastzug von rechts kommend bis zum Kopfpunkt F derselben vorfahren. Man bestimme nach §. 9 die dieser Radstellung entsprechende Transversalkraft $V_2$ und berücksichtige,

Fig. 92.

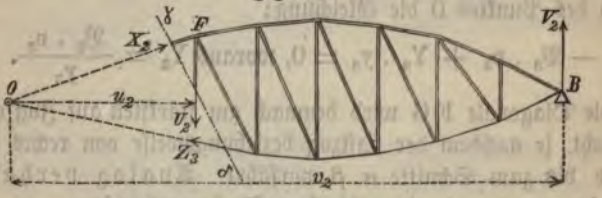


selbe als Stützendruck im Punkte A auftritt. Soll sich nun das Fragment A $\gamma$ $\delta$ unter dem Einfluße der auf dasselbe wirkenden Kräfte $X_2$, $U_2$, $Z_3$ und $V_2$ im Gleichgewichte befinden, so muß in Bezug auf den Drehpunkt O die Gleichung bestehen:

$$- V_2 \cdot v_2 + U_2 \cdot u_2 = 0, \text{ woraus } U_2 = \frac{V_2 \cdot v_2}{u_2}.$$

Da hier $U_2$ rechts drehend wirken muß, so besteht der Pfeilrichtung von $U_2$ entsprechend, die Maximalbeanspruchung von E F in einer Druckspannung. Fährt dagegen der Lastzug von links kommend bis zu F

Fig. 93.




auf, so erfährt D F die größte Zugspannung. Nennen wir die dieser Radstellung zukommende Transversalkraft $\mathfrak{V}_2$ und stellen die Gleichgewichtsbedingung für das Fragment B $\gamma$ $\delta$, Fig. 93, bezüglich des Drehpunktes O auf, so erhält man die Gleichung:

$$- \mathfrak{V}_2 \cdot v_2 + U_2 \cdot u_2 = 0, \text{ woraus } U_2 = \frac{\mathfrak{V}_2 \cdot v_2}{u_2},$$

welche Anspruchnahme der Pfeilrichtung entsprechend wirklich in einer Zugspannung besteht.

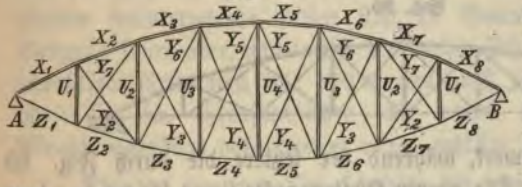
Analog verhalten sich alle andern Vertikalen der linken Trägerhälfte, d. h. sie werden am meisten gedrückt, wenn der Lastzug alle rechts vor ihnen liegenden Felder bedeckt und am meisten gezogen, wenn der Lastzug auf alle links von ihnen liegenden Felder auffährt.

In der rechten Trägerhälfte ergibt sich dagegen, wegen der entgegengesetzten Lage der Diagonalen, auch die entgegengesetzte Anspruchnahme der Vertikalen, d. h. die Vertikalen in der rechten Trägerhälfte werden am stärksten gedrückt, beziehungsweise gezogen, wenn der Lastzug links oder rechts von ihnen liegenden Felder bedeckt.

Gekreuzte Diagonalen. Wir haben gesehen, daß alle Füllungs- bei dem eben vorgeführten allgemeinen Fachwerkträger abwechselnd und Druck in Anspruch genommen werden, da aber die Her- und Verbindung solcher, sowohl dem Zuge als auch dem Drucke

gehörig widerstehender Füllungsglieder sehr schwierig ist, so pflegt man in allen Feldern, in welchen die Diagonalen auf Zug und Druck in Anspruch genommen werden, gekreuzte Diagonalen anzuwenden. Werden nun beide Diagonalen als Zugstangen konstruirt, die also eine Druckspannung aufzunehmen unfähig sind, so wird jede von beiden nur bei derjenigen Belastungsweise in Anspruch genommen, welche in ihr eine Zugspannung erzeugt, während die andere im spannungslosen Zustande bleibt. Es kommen also beim Doppelfachwerke, Fig. 94, nur die Maxima der in den Diagonalen des einfachen Trägers, Fig. 88, gefundenen **Zug**spannungen in Betracht. So kommt z. B. im 3. Felde für die Diagonale F G die Zugspannung $Y_3$ (max), dagegen für jene E H die Zugspannung $Y_6$ zur Wirkung. Auf dieselbe Art kann man in den übrigen Feldern die Spannungen der gekreuzten Diagonalen direkt aus Fig. 88 bestimmen.

Fig. 94.




Wenn aber die Diagonalen des Doppelfachwerkes sämmtlich als Zugbänder konstruirt werden, die keine Druckspannung aufzunehmen fähig sind, so müssen selbstverständlich die Vertikalständer die größten sich ergebenden **Druck**spannungen aufzunehmen im Stande sein; es sind daher für dieselben nur die nach Fig. 92 zu bestimmenden größten Druckspannungen U des einfachen Trägers maßgebend.

Endlich ist noch zu bemerken, daß wegen der symmetrischen Anordnung des Doppelfachwerkes zur vertikalen Mittellinie, die zu ihr symmetrisch liegenden Bestandtheile gleich große Anspruchnahmen erfahren, so daß z. B.

$$X_1 = X_8, \quad X_2 = X_7, \quad X_3 = X_6, \quad X_4 = X_5, \text{ ferner}$$
$$Z_1 = Z_8, \quad Z_2 = Z_7, \quad Z_3 = Z_6, \quad Z_4 = Z_5 \text{ u. s. f.}$$

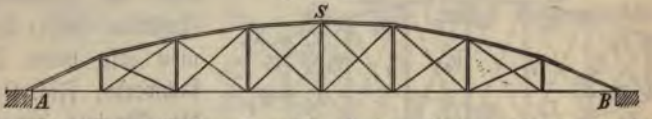
Anmerkung. Werden die gekreuzten Diagonalen im Doppelfachwerk so konstruirt, daß sie nur Druckspannungen annehmen können, wie dies z. B. bei Holzkonstruktionen vorkommt, so sind offenbar für die Diagonalen oder Streben nur die größten Druckspannungen und für die Vertikalen zumeist nur die größten Zugspannungen des zugehörigen einfachen Trägers maßgebend.

## §. 27.

## Spezielle Fälle.

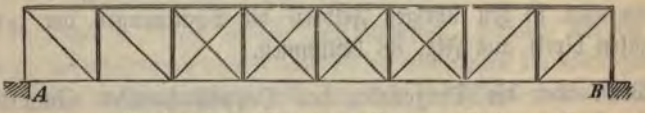
Gerade so, wie bei dem durch Fig. 94 versinnlichten Doppelfachwerke ist die Bestimmung der Anspruchnahme der Pauli'schen und der Parabelträger vorzunehmen. Der erstere hat bekanntlich dieselbe Form

Fig. 95.




wie das obige Doppelfachwerk, während der letztere die durch Fig. 95 repräsentirte Gestalt hat. Die oberen Knotenpunkte liegen hierbei in einer Parabel, deren Scheitel im mittleren Knotenpunkte s liegt, während die

Fig. 96.




unteren Knotenpunkte in einer Geraden liegen. Seltener findet man die umgekehrte Anordnung.

Bei den Trägern mit parallelen Gurtungen oder Parallelträgern

Fig. 97.

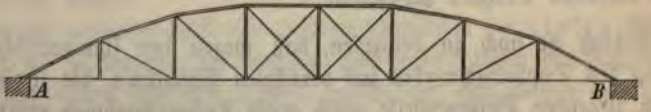
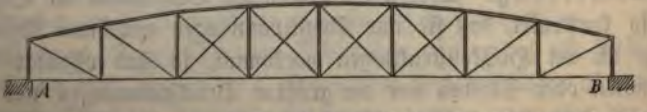



Fig. 96, bei den Schwedler'schen Trägern, Fig. 97, und den Halbparabelträgern, Fig. 98, sind nur in den mittleren Feldern der bezüglichen Träger gekreuzte Diagonalen nothwendig, weil nur in diesen Feldern bei

Fig. 98.




chen Diagonalen Zug und Druck in denselben stattfindet. Da übrigens Bestimmung der Spannungen in den einzelnen Konstruktionstheilen

der genannten Fachwerke analog wie im vorigen Paragraphe vorzunehmen ist, so wollen wir darauf weiter nicht eingehen und verweisen bezüglich der speziellen Anordnung der genannten Systeme auf unsere Baumechanik, im Verlage von H. Dominicus in Prag.

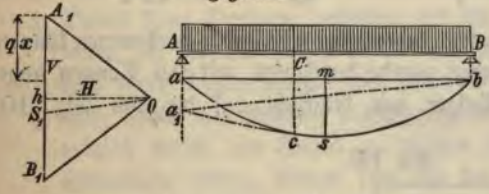
Anmerkung. Noch einfacher wird die graphische Bestimmung der Anspruchnahme von Brückenträgern, wenn, wie es bisher in der Praxis fast durchgehends geschah, statt der natürlichen mobilen Belastung eine dieselbe stellvertretende stetige Last in Betracht gezogen wird. Dieser Vorgang führt aber, namentlich bei kurzen Eisenbahnbrücken, zu bedeutend unrichtigen Resultaten, wie dies bereits im §. 12 nachgewiesen wurde; doch dürfte er für Straßenbrücken, bei denen als Maximalbelastung ein Menschengedränge vorausgesetzt wird, zulässig sein.

Die den einzelnen Querschnitten bei totaler gleichmäßiger Belastung des Trägers zukommenden größten Biegungsmomente sind dann nach §. 11 durch eine Parabel bestimmt und auch die der einseitigen mobilen Belastung entsprechenden Transversalkräfte lassen sich sehr leicht mittelst des Kräfte- und Seilpolygones auffinden.

Da die Bestimmung des größten Biegungsmomentes im genannten Paragraphe hinreichend erläutert wurde, so wollen wir uns hier nur mit der Bestimmung der Transversalkräfte bei einseitiger mobiler Belastung beschäftigen.

Bezeichnen wir die mobile Belastung des Trägers A B, Fig. 99, per Längeneinheit mit q und seine Länge mit l, so ist die totale mobile Last gleich q . l und der ihr entsprechende Stützendruck in A oder B gleich $D = \frac{q \cdot l}{2}$. Das dieser Belastung entsprechende Seilpolygon geht nach §. 11 in eine Parabel über, deren Scheitel s durch $m\,s = \frac{q \cdot l^2}{8\,H}$ bestimmt ist, wobei H die Poldistanz im zugehörigen Kräftepolygone bedeutet, in welchem $A_1\,B_1 = q \cdot l$ und $A_1\,h = h\,B_1$ ist. Soll nun für einen beliebigen Querschnitt C, der von A um x absteht, die größte, aus der mobilen Belastung resultirende Transversalkraft ermittelt werden, so darf blos das größere Fragment B C des Trägers belastet sein, und muß also ein

Fig. 99.



q . x des kleineren Fragmentes A C wegfallen. Diese wird aber nach §. 8 aus dem Seilpolygone sofort entfernt, wenn man im Punkte c an die Seilkurve die Tangente zieht, dieselbe bis zum Schnitte $a_1$ mit der Vertikalen des nächsten Auflagers verlängert und die Gerade b $a_1$ als neue Schlußseite des der einseitigen Belastung entsprechenden Seilpolygones betrachtet. Wird nun zu $a_1$ b im Kräftepolygone durch O die Parallele O $S_1$ geführt und zugleich von $S_1$ $A_1$ die Belastung q . x weggenommen, so gibt $S_1$ V den neuen in A wirkenden Auflagerdruck, welcher zugleich die gesuchte Transversalkraft vorstellt. Bei kleineren Spannweiten kann jedoch die Beanspruchung, welche durch schwere Lastwagen hervorgerufen wird, eine größere sein als jene durchs Menschengedränge. In Fig. 100 bis 102 sind die bezüglichen Lastvertheilungen angegeben und zwar gilt Fig. 100 für Brücken in gewöhnlichen Feldwegen, Fig. 101 für Brücken in Chausséen und Fig. 102 für Brücken in größeren Städten, wo nicht selten beim Transporte schwerer Maschinen, Dampfkesseln, Eisenbahnwagen

Fig. 100.

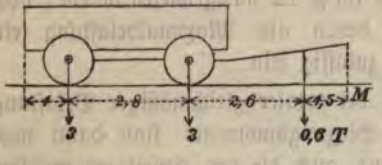
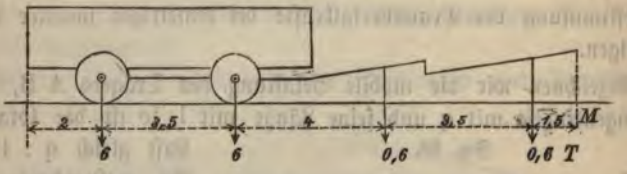
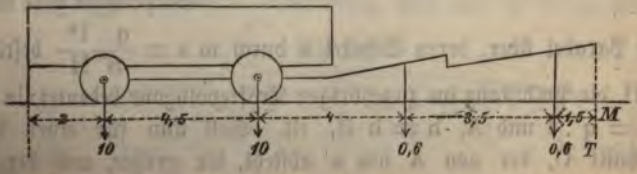



Fig. 101.




und demontirten Lokomotiven sehr bedeutende Axendrücke vorkommen können. Das Gewicht von zwei Pferden wurde durchwegs mit 0,6 Tonnen angenommen. Brücken, deren Träger mit Rücksicht auf die aus Fig. 102

Fig. 102.




Lastvertheilung konstruirt wurden, können auch für Pferde-Eisen- nützt werden.

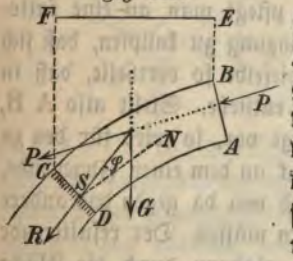
Die Bestimmung der Transversalkräfte und Biegungsmomente geschieht dann selbstverständlich nach den für isolirte Lasten im §. 9 entwickelten Regeln.

## §. 28.

## Konstruktion der Stützlinie im Gewölbe.

Zum Schluße dieses Theiles wollen wir noch die Stabilität eines symmetrisch geformten und symmetrisch belasteten Gewölbes durch Konstruktion der Stützlinie bestimmen. Zuvor müssen wir aber noch einige allgemeine Bemerkungen über die Gleichgewichtsbedingungen von Stützmauern vorausschicken, die wir sogleich dem Gewölbsbogen anpassen wollen.

Fig. 103.




Es sei A B C D, Fig. 103, ein beliebiges Stück eines Gewölbes, dessen Dicke senkrecht zur Zeichnungsfläche in der folgenden Untersuchung gleich der Längeneinheit vorausgesetzt werden wird. Auf dieses Gewölbsfragment wirken die beiden äußeren Kräfte G und P, von welchen die erstere das Gewicht des Bogenstückes A B C D sammt dessen Belastung B E F C vorstellt, während die letztere jenen Druck repräsentirt, der von der Fortsetzung des weggedachten Bogens herrührt und diesen ersetzen muß.

Soll sich nun das Fragment A B C D unter dem Einfluße dieser Kräfte auf der Fuge C D im stabilen Gleichgewichte befinden, so muß:

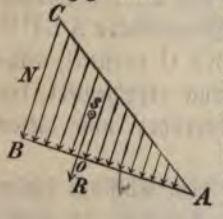
1. Damit keine Drehung desselben um die Kanten C und D eintreten könne, die Resultirende R aus P und G die Stützfläche C D innerhalb deren Begrenzungskanten schneiden;
2. muß, damit kein Gleiten des Bogenstückes längs der Stützfläche C D möglich werde, der Winkel $\varphi$, welchen R mit der Normalen N zur Stützfläche bildet, kleiner sein als der Reibungswinkel der Wölbsteine, der im Mittel 30 Grad beträgt, und
3. darf durch den auf die Flächeneinheit der Stützfläche entfallenden größten Druck die Festigkeit des Materiales nicht gefährdet sein.

Damit aber das ganze Gewölbe in allen seinen Theilen im stabilen Gleichgewichte bleibe, müssen selbstverständlich diese drei Bedingungen für jede der Gewölbsfugen erfüllt werden. Verbindet man nun die Punkte, in welchen die aufeinander folgenden Fugen von den zugehörigen Resul-

tirenden der äußeren Kräfte geschnitten werden, durch eine kontinuirliche Linie, so erhält man die sogenannte Stützlinie des Gewölbes, die offenbar das Seil- oder Gelenkpolygon zu den auf die einzelnen Bogentheile wirkenden äußeren Kräften bildet. Es frägt sich nun, wie weit sich die Stützlinie den beiden Wölblinien des Bogens nähern dürfe, ohne daß die Stabilität des Bogens gefährdet sei?

Die günstigste Druckvertheilung in der Bogenmasse würde offenbar dann eintreten, wenn die Stützlinie mit der durch die Mittelpunkte aller Fugen gehenden Bogenaxe zusammenfallen möchte, denn dann würde sich der jeder Fugenfläche zukommende Druck über die ganze Stützfläche vollkommen gleichmäßig vertheilen und somit kein einseitiges Zusammendrücken der Bogenmasse ermöglichen. Da jedoch in der Baupraxis ein so eminenter Stabilitätsgrad selten verlangt wird, so pflegt man an eine rationelle Steinkonstruktion gewöhnlich nur die Bedingung zu knüpfen, daß sich der auf jede Lagerfläche wirkende Druck über dieselbe so vertheile, daß in derselben nirgends ein negativer Druck, d. i. Zug entstehe. Stellt also A B, Fig. 104, eine beliebige Fuge vor, so wird für den zulässigen Grenzfall der Druck an dem einen Fugenende, z. B. bei A, Null sein und von da gegen das andere Fugenende B stetig zunehmen müssen. Der resultirende Druck R auf A B wird alsdann durch die Fläche des Dreieckes A B C bestimmt sein, somit, wenn A B = b und der Maximaldruck B C = N gesetzt wird,

Fig. 104.




$$R = \frac{b \cdot N}{2} \ldots\ldots (\alpha).$$

Da für diesen Grenzfall der resultirende Druck R durch den Schwerpunkt S des Kräften-Dreieckes A B C geht, so wird offenbar der Punkt o, in welchem R die Fuge A B schneidet, durch $B\,o = \frac{b}{3}$ bestimmt sein.

Hieraus folgt, daß bei einer rationell durchgeführten Gewölbskonstruktion die Stützlinie innerhalb des mittleren Drittels der Fugendicke bleiben müsse.

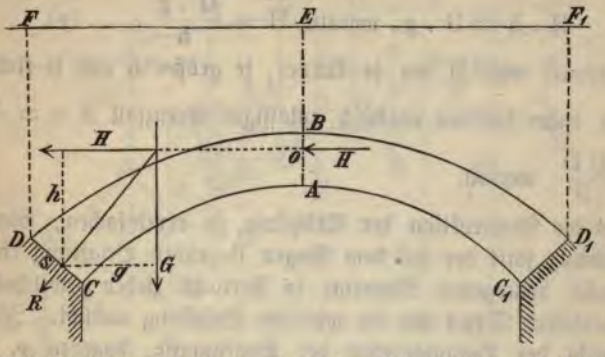
Für den durch Fig. 104 dargestellten Grenzfall ergibt sich aus der ($\alpha$) für den Maximaldruck N pro Flächeneinheit der Werth

$$N = \frac{2R}{b} \ldots\ldots (\beta),$$

also doppelt so groß als für den Fall, wenn R durch die Fugenmitte ginge.

Betrachtet man nun den symmetrisch geformten und symmetrisch belasteten Bogen, Fig. 105, so findet man, daß, weil die beiden Bogen-

Fig. 105.




hälften A B C D und A B $C_1$ $D_1$ bezüglich der Kämpferfugen C D und $C_1$ $D_1$ gleiche, aber entgegengesetzt wirkende Drehungsmomente besitzen, dieselben aufeinander in der gemeinschaftlichen Scheitelfuge A B einen wechselseitigen, horizontalen Druck ausüben, den man gewöhnlich den horizontalen Schub zu nennen und mit H zu bezeichnen pflegt. Da nun dieselben Gleichgewichtsbedingungen, die sich für die eine Bogenhälfte A B C D aufstellen lassen, selbstverständlich auch für die andere Bogenhälfte A B $C_1$ $D_1$ gelten, so wird man nur die eine Bogenhälfte z. B. jene A B C D in Betracht zu ziehen und die Wirkung der anderen Bogenhälfte durch den horizontalen Schub H zu ersetzen haben.

Es frägt sich nun, wie hoch der Angriffspunkt von H über A anzunehmen ist?

Würde der Bogen das Stabilitätsmaximum besitzen sollen, so müßte — wie bereits erwähnt wurde — die Stützlinie mit der Bogenaxe zusammenfallen, also auch H in der Mitte der Scheitelfuge angreifen müssen. Soll aber bloß untersucht werden, ob der projektirte Bogen überhaupt den für den Grenzfall zulässigen Stabilitätsgrad besitzt, d. h. ob die Stützlinie nirgends aus dem mittleren Bogendrittel heraustritt, so wird der Angriffspunkt von H im zweiten Drittel von A B über A angenommen. Denn nach der Theorie des kleinsten Widerstandes wird auf A B nur jener horizontale Schub H einwirken, welcher für den Grenzfall des Gleichgewichtes unentbehrlich, also ein Minimum ist. Denkt man

sich also vorläufig den Bogen stabil und bezeichnet das Gewicht des halben Bogens sammt seiner Belastung mit G, so wird sich aus G und H eine Resultirende R ergeben, die die Widerlagsfuge C D innerhalb des mittleren Drittels schneiden soll. Für den Gleichgewichtszustand gegen Drehung bezüglich des Punktes s wird also die Gleichung bestehen müssen:

$$H \cdot h = G \cdot g, \text{ woraus } H = \frac{G \cdot g}{h} \ldots . (\gamma).$$

Hiernach wird H um so kleiner, je größer h und je kleiner g ist, und muß daher für den praktisch zulässigen Grenzfall $B\,o = \frac{A\,B}{3}$ und $C\,s = \frac{C\,D}{3}$ werden.

Um die Konstruktion der Stützlinie zu vereinfachen, wird man in der Zeichnung statt der auf dem Bogen liegenden Belastung ein mit der Bogenmasse homogenes Material in Betracht ziehen, welches auf den Bogen denselben Druck wie die wirkliche Belastung ausübt. Ist z. B. $\gamma$ das Gewicht der Volumseinheit der Bogenmasse, dagegen $\gamma_1$ jenes der Aufschüttung und bezeichnet h die Höhe dieser Aufschüttung über irgend einem Punkte der oberen Wölblinie, so ergibt sich die dieser Anschüttungshöhe entsprechende reducirte Belastungshöhe y aus der Gleichung

$$\gamma_1 h = \gamma \cdot y, \text{ woraus } y = \frac{\gamma_1 \cdot h}{\gamma} \ldots . (\delta).$$

Ist das Gewölbe ein Brückengewölbe, so kommt auch noch die mobile Belastung in Betracht, die ebenfalls durch eine entsprechende Menge des Wölbsteinmateriales zu ersetzen ist. Die mobile Belastung pr. □Meter der Brückenbahn beträgt bei Straßenbrücken im Maximum 400 und bei Eisenbahnbrücken 1400 Kilogramm. Nennt man allgemein den von der mobilen Belastung auf den □Meter der Brückenbahn entfallenden Betrag q, ferner wie oben das Gewicht von 1 Cub.-Meter der Bogenmasse $\gamma$ und die statt der mobilen Belastung in Rechnung zu nehmende reduzirte Belastungshöhe $y_1$, so ergibt sich dieselbe offenbar aus

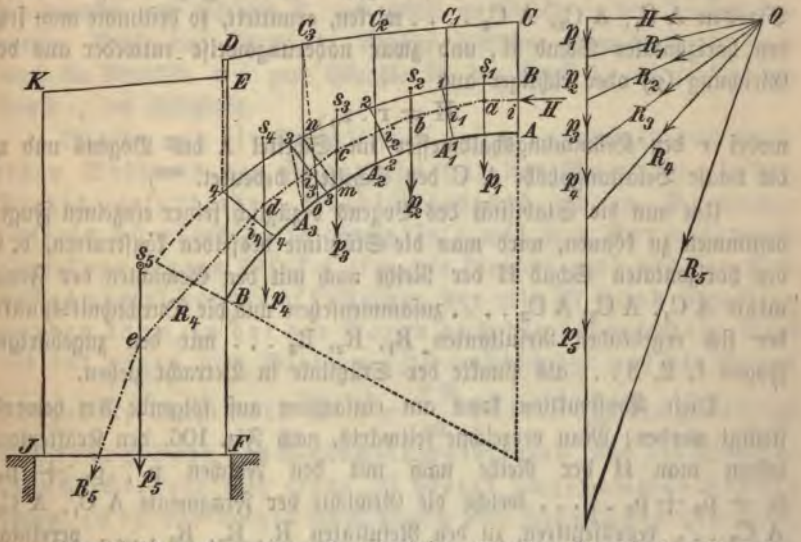
$$q = \gamma \cdot y_1, \text{ woraus } y_1 = \frac{q}{\gamma} \ldots . (\varepsilon).$$

Die Fig. 106 stelle nun den projektirten Bogen sammt seiner auf das Wölbsteinmateriale nach den Gleichungen ($\delta$) und ($\varepsilon$) reduzirten Belastung vor, dessen Stützlinie graphisch bestimmt werden soll.

Nimmt man die Tiefe des Gewölbes (senkrecht zur läche) gleich Eins an, und wählt das Gewicht der

Volumseinheit der Wölbsteinmasse als Maßeinheit der auf das Gewölbe wirkenden Kräfte, so repräsentiren offenbar die Flächen A C $C_1$ $A_1$, $A_1$ $C_1$ $C_2$ $A_2$ u. s. f. die Gewichte dieser Vertikalstreifen.

Fig. 106.




Hierbei ist noch zu bemerken, daß der über der Kämpferfuge liegende Vertikalstreifen schon vom Widerlager selbst getragen wird, und somit bei der Stabilitätsbestimmung des Bogens außer Betracht fällt.

Um nun die Flächen dieser Streifen und ihre Schwerpunkte rasch bestimmen zu können, nehme man die Breiten derselben so gering an, daß die einzelnen Streifen als Trapeze angesehen werden können, deren Flächen man genau genug erhält, wenn man deren Breiten mit den durch ihre Mitte gehenden Höhen multiplizirt. Die Schwerpunkte $s_1$, $s_2$, $s_3$ ... der einzelnen Streifen kann man dann ebenfalls ohne erheblichen Fehler in den Mittellinien dieser Streifen annehmen.

Der Deutlichkeit halber wurde der Bogen sammt seiner Belastung nur in vier Vertikalstreifen zerlegt.

Würde man nun annehmen, daß z. B. auf die Fuge m n die Masse A $A_3$ $C_3$ C der ersten drei Streifen wirke, so möchte man offenbar einen Fehler begehen, der durch das Dreieck $A_3$ m n repräsentirt würde. Selbstverständlich muß die Fuge, auf welche die bezeichnete Masse einwirkt,

tiefer liegen. Um diese Fuge zu erhalten, halbire man die Basis $A_3$ m des Fehlerdreieckes, verbinde den Halbirungspunkt o mit $C_3$ und ziehe $A_3$ 3 parallel zu o $C_3$, so ist die durch 3 gehende Fuge 3,3 die gesuchte Fuge, auf welche die Masse der drei ersten Streifen wirkt. *)

Hat man auf diese Weise der Reihe nach die Fugen, auf welche die Streifen A $C_1$, A $C_2$, A $C_3$ . . . . wirken, ermittelt, so bestimme man jetzt den horizontalen Schub H, und zwar näherungsweise entweder aus der Gleichung ($\gamma$) oder richtiger aus

$$H = r \cdot z_0 ,$$

wobei r den Krümmungshalbmesser im Scheitel A des Bogens und $z_0$ die totale Belastungshöhe A C des Scheitels bedeutet. **)

Um nun die Stabilität des Bogens bezüglich seiner einzelnen Fugen bestimmen zu können, wird man die Stützlinie desselben konstruiren, d. h. den horizontalen Schub H der Reihe nach mit den Gewichten der Fragmente A $C_1$, A $C_2$, A $C_3$ . . . . zusammensetzen und die Durchschnittspunkte der sich ergebenden Resultanten $R_1$, $R_2$, $R_3$ . . . mit den zugehörigen Fugen 1, 2, 3 . . . als Punkte der Stützlinie in Betracht ziehen.

Diese Konstruktion kann am einfachsten auf folgende Art bewerkstelligt werden: Man verzeichne seitwärts, nach Fig. 106, den Kräfteplan, indem man H der Reihe nach mit den Flächen $p_1$, $p_1 + p_2$, $p_1 + p_2 + p_3$ . . . . , welche die Gewichte der Fragmente A $C_1$, A $C_2$, A $C_3$ . . . repräsentiren, zu den Resultaten $R_1$, $R_2$, $R_3$ . . . . vereinigt. Selbstverständlich wird man zur Konstruktion dieses Kräfteplanes densel-

---

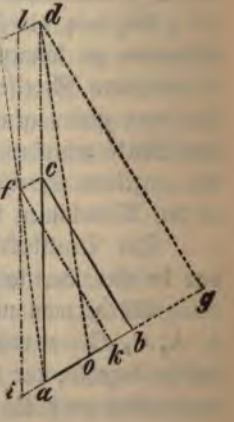
*) Diese Korrektion der Fugen beruht auf der Verwandlung eines Dreieckes a b c, Fig. 107, in ein gleich großes Parallelogramm a d l i, weches sich von außen an die Hypothenuse dieses Dreieckes bis zu einem bestimmten Punkte d anlehnt. Macht man a o = o b, a e ∥ o d und c f ∥ d e ∥ a o, so wird die Fläche a d l i oder jene b c d l f k mit △ a b c gleiche Größe haben.

Es ist nämlich △ a b c = a o . b c,
und Fläche b c d l f k = a d l i = f c . d g.

Aus f c : e d = b c : d g folgt f c . d g = e d . b c = a o . b c, also ist wirklich △ a b c = b c d l f k.

**) Die Ableitung der Gleichung $H = r \cdot z_0$ findet man in meiner Baumechanik (1. Theil pag. 56).

Fig. 107.



den Maßstab anzuwenden haben, nach welchem die Flächen $p_1, p_2, p_3 \ldots$ bestimmt wurden.

Zieht man nun im Gewölbsbogen durch den Schnittpunkt a des H mit $p_1$ die Parallele zum Strahle $R_1$, so gibt der Punkt $i_1$, in welchem a b die Fuge 1 schneidet, einen Punkt der Stützlinie; von b führe man b c parallel zum Strahle $R_2$ und erhält im Punkte $i_2$ der Fuge 2 den zweiten Punkt der Stützlinie. Analog bestimme man in der 3. Fuge durch die Parallele c d zum Strahle $R_3$ den Punkt $i_3$ und so fort den Punkt $i_4$ der Stützlinie.

Bleibt nun die Stützlinie $i_1\, i_2\, i_3\, i_4$ innerhalb des mittleren Drittels der Fugen, so hat der Bogen den in der Praxis geforderten Stabilitätsgrad gegen Drehung; schließt überdies diese Stützlinie mit den Normalen der einzelnen Fugen Winkel ein, die kleiner sind als der Reibungswinkel der Gewölbsteine, der mit 30 Grad bemessen werden kann, so hat der Bogen auch die hinreichende Stabilität gegen das Gleiten. Ist endlich der auf die Fugen ausgeübte Maximaldruck $N = \frac{2R}{b}$ kleiner als die zulässige Belastungshöhe des Wölbsteinmateriales, die bei 30facher Bruchsicherheit mit circa 30 Meter angenommen werden kann, so ist der Bogen auch gegen das Zerdrücken gesichert.

Aus der Betrachtung der Stützlinie $i\, i_1\, i_2\, i_3\, i_4$ folgt, daß dieselbe in flachen Bögen nahezu mit der Drucklinie a b c d e zusammenfällt, weshalb man bei solchen Bögen schon aus der Lage der Drucklinie auf den Stabilitätsgrad der Bögen schließen kann, und sich somit mit der Konstruktion der Drucklinie zu begnügen pflegt.

Um nun noch zu untersuchen, ob das Widerlager stark genug sei, so setze man die Resultirende aus H und der Fläche A B D C, welche durch den Strahl $R_4$ bestimmt ist, mit der Fläche $p_5$ des Widerlagers zur Resultanten $R_5$ zusammen, und sehe nach, ob dieselbe die Lagenfläche F J unter den drei oben entwickelten Stabilitätsbedingungen schneidet.

Hierbei wird man bei Brückengewölben, der größeren Sicherheit halber, das ganze Widerlager frei von der mobilen Belastung anzunehmen haben, während der ganze Bogen mit der mobilen Belastung bedeckt vorausgesetzt wird. Aus diesem Grunde bildet in Fig. 106 die reduzirte Belastungslinie C D E K keine kontinuirlich zusammenhängende, sondern eine gebrochene Linie.

Nachdem wir nun im Vorhergehenden die durch die äußeren Kräfte in den einzelnen Querschnitten der einfachen Träger erzeugten Transversalkräfte und Biegungsmomente bestimmt und ihren Einfluß auf die Konstruktionselemente der Fachwerke erörtert haben, so wollen wir noch im Nachfolgenden in gedrängter Kürze die Elemente der Festigkeitslehre entwickeln, um hiernach die Größe der Querschnitte der Konstruktionstheile verschiedener Träger ermitteln zu können. Obwohl im folgenden Theile der Sachlage nach die Rechnung die Hauptrolle spielt, so wurde doch die Konstruktion überall, wo sie sich mit Vortheil anwenden ließ, gebührend berücksichtigt.

---

# 3. Theil.

# Die Elemente der Festigkeitslehre.

## §. 29.

## Die Normalfestigkeit prismatischer Stäbe.

Die Normalfestigkeit prismatischer Stäbe kommt zur Wirksamkeit, wenn die Resultirende P der äußeren, auf den Stab wirkenden Kräfte der Richtung nach mit der Axe des Stabes zusammenfällt; sie äußert sich als **Zug** oder **Druck**, je nachdem durch P eine Entfernung oder Annäherung der benachbarten Querschnitte angestrebt wird. Daraus folgt, daß, wenn außer der Belastung auch das Eigengewicht des Stabes denselben auf Normalfestigkeit in Anspruch nehmen soll, die Axe des Stabes eine lothrechte Lage haben muß. Bei kurzen Stäben, wie sie bei Fachwerkträgern gewöhnlich vorkommen, wird aber der Einfluß des Eigengewichtes ganz außer Acht gelassen, weil er im Verhältniß zur äußeren Belastung verschwindend klein ist.

Die Normalfestigkeit (nach Obigem auch Zug- beziehungsweise Druck-
Festigkeit erfahrungsmäßig dem Querschnitte des Stabes
direl der Querschnitt ist, um so mehr Fasern
r weise dem Zerdrücken.

Dasjenige Gewicht, welches ein Prisma, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit ist, eben zerreißt oder zerdrückt, wird das Maß oder der Modul der Zug- oder Druckfestigkeit genannt.

Bezeichnet:

K den Festigkeitsmodul für Zug,

$K_1$ jenen für Druck,

F den Querschnitt des Stabes und

P die Kraft, welche denselben zerreißen, beziehungsweise zerdrücken soll, so ist P bestimmt durch:

$$\left.\begin{aligned} P &= K \,.\, F \\ P &= K_1 \,.\, F \end{aligned}\right\} \ldots (\alpha).$$

Die folgende Tabelle enthält die Mittelwerthe der Festigkeitsmoduls der wichtigsten Materialien, bezogen auf den □ **Centimeter** als Flächeneinheit und das **Kilogramm** als Krafteinheit.

| Materiale | Festigkeitsmodul | |
|---|---|---|
| | für Zug | für Druck |
| Schmiedeisen . . . . . | 4000 | 4000 |
| Gewöhnl. Stahl . . . . . | 6000 | 6000 |
| Gußstahl . . . . . | 8000 | 10000 |
| Gußeisen . . . . . | 1300 | 7500 |
| Holz . . . . . | 800 | 600 |
| Stein . . . . . | — | 300 |

Da es sich in der Baupraxis weniger um die Kraft handelt, durch welche ein Prisma zerrissen oder zerdrückt wird, sondern vielmehr um die Belastung, welche das Prisma auf die beabsichtigte Dauer mit Sicherheit tragen kann, so pflegt man die Einheit des Querschnittes nur mit einem gewissen Theile vom Festigkeitsmodul zu belasten und nennt diesen Theil den Sicherheits- oder Tragmodul. Nimmt man vom Festigkeitsmodul den nten Theil als Sicherheitsmodul, so sagt man: man baue mit nfacher Sicherheit.

Bezeichnet man den Sicherheitsmodul für Zug mit k, und jenen für Druck mit $k_1$, so wird dann allgemein:

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{K}{n} \\ \text{und } k_1 &= \frac{K_1}{n} \end{aligned}\right\} \ldots (\beta).$$

Die Belastung, welche der prismatische Stab vom Querschnitte F mit nfacher Sicherheit gegen den Bruch tragen kann, ist dann mit Rücksicht auf ($\alpha$) und ($\beta$) bestimmt durch:

$$\left.\begin{aligned} P &= k \,.\, F \\ \text{oder } P_1 &= k_1 \,.\, F \end{aligned}\right\} \ldots (\gamma).$$

Ist aber die Belastung und der Sicherheitsmodul gegeben, so ergibt sich hieraus der erforderliche Querschnitt:

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{P}{k} \\ \text{oder } F_1 &= \frac{P}{k_1} \end{aligned}\right\} \ldots (\delta).$$

Der Sicherheitsgrad, oder der Werth von n, ist nicht nur vom Materiale, sondern auch von dem speziellen Bauzwecke des Stabes abhängig. Im Allgemeinen ist n bei bewegter Belastung größer als bei ruhender, und zwar um so größer, je bedeutender die Erschütterungen sind, denen der Stab durch die bewegte Belastung ausgesetzt ist. So z. B. wählt man für Schmiedeisen im Brückenbaue bei der Berechnung der Hauptträger gewöhnlich die 5fache, dagegen bei den Querträgern, weil sie größeren Erschütterungen ausgesetzt sind, die 6fache Sicherheit, während im Hochbaue, wo die Belastung zumeist eine ruhende ist, nur die 3 bis 4fache Bruchsicherheit gewählt wird.

Die folgende Tabelle gibt die gebräuchlichen Werthe von n.

| Materiale | Ruhende Belastung | Bewegte Belastung | |
|---|---|---|---|
| | | Nothbau | Definitiver Bau |
| Schmiedeisen . . . . . | 4 | 3 | 5—6 |
| Gewöhnliches Eisen . . . . . | | | |
| Gußstahl . . . . . | | | |
| Gußeisen . . . . . | 5 | 4 | 6—8 |
| Holz . . . . . | 10 | 6 | 12 |
| Stein . . . . . | 20 | — | 30 |

Hiernach ergibt sich, mit Rücksicht auf die vorhergehende Tabelle, der mittlere Werth des Sicherheitsmoduls, d. i. die zulässige Belastung pro Flächeneinheit, wenn wieder der □ Centimeter als Flächen- und das Kilogramm als Kraft-Einheit gewählt wird, aus der folgenden *Tabelle:*

| Materiale | Ruhende Belastung | | Bewegte Belastung | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Nothbau | | Definitiver Bau | |
| | Zug | Druck | Zug | Druck | Zug | Druck |
| Schmiedeisen . . . . . | 800 | 800 | 1000 | 1000 | 700— 600 | 700— 600 |
| Gewöhnliches Stahl . | 1500 | 1500 | — | — | 1200—1000 | 1200—1000 |
| Gußstahl . . . . . | 2000 | 2000 | — | — | 1600—1300 | 1600—1300 |
| Gußeisen . . . . . | 260 | 1500 | 300 | 1800 | 200— 160 | 1200— 900 |
| Holz . . . . . | 80 | 60 | 130 | 100 | 60 | 50 |
| Stein . . . . . | — | 15 | — | — | — | 10 |

Beispiel. Welchen Durchmesser muß eine zilindrische Zugstange aus Schmiedeisen erhalten, um mit 5facher Sicherheit eine Last von 1000 Kilogr. zu tragen?

Nach Gleichung ($\delta$) ist $F = \frac{P}{k}$. Bezeichnet man den Durchmesser der Stange mit d, so ist deren Querschnitt $F = \frac{\pi}{4} d^2$ und da $P =$ 1000 Kilogr. und bei 5facher Sicherheit k pro □Centimeter gleich 700 Kilogr. ist, so wird nach ($\delta$)

$$\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{1000}{700},$$

und hieraus $d = 1{,}43$ Centim.

## §. 30.

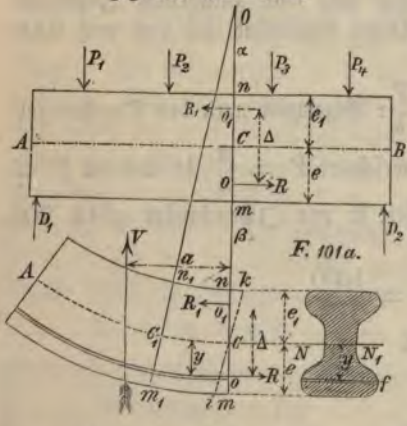
## Biegungselastizität der einfachen Träger mit gerader Axe.

A. Voraussetzung und Erklärung. Ein Körper wird auf Biegungselastizität allein nur dann beansprucht, wenn die angreifenden oder äußeren Kräfte senkrecht stehen zur Axe des Körpers, (nämlich zur Verbindungslinie der Schwerpunkte aller Querschnitte) und sämmtlich in einer Ebene — der sogenannten Kraftebene — liegen, die durch die Axe des Körpers gehen soll.

Diese Kräfte mögen zum Theil isolirte Lasten sein, zum Theil mögen sie sich über die ganze Länge, oder über einzelne Theile des Trägers erstrecken. Zu den äußeren Kräften gehören aber auch die Reaktionen der Stützen oder die Stützendrücke.

Durch die Einwirkung aller der äußeren Kräfte, die wir kurzweg die totale Belastung des Trägers nennen wollen, erfährt der Träger, den wir uns als ein Bündel von parallel zu seiner Axe liegenden, unter einander fest verbundenen Fasern denken, eine Biegung, welche jedoch nur so gering vorausgesetzt werden soll, daß durch sie die Elastizitätsgränze nicht überschritten werde; d. h. daß nach der Beseitigung der Belastung durch die Elastizität des Materiales die ursprüngliche Form des Trägers genau wieder hergestellt werde. Betrachten wir nun irgend ein beliebiges Fragment A C, Fig. 108 des im Gleichgewichte befindlichen Trägers, so werden die ursprünglich parallelen, einander sehr nahen Querschnitte C und $C_1$ nach eingetretener Biegung nicht mehr parallel sein, sondern sie stehen dann auf den gekrümmten Fasern nahezu senkrecht und schneiden sich daher gehörig verlängert in einer Geraden O Fig. 108 a.

Fig. 108 und 108 a.




Aus dem Umstande, daß die beiden Querschnitte C und $C_1$ nach eingetretener Biegung eine konvergirende Lage angenommen haben, folgt nun unmittelbar, daß die zwischen denselben befindlichen Fasern in den verschiedenen Faserschichten eine verschiedene Länge haben müssen. Es werden daher nach Fig. 108 a die auf der unteren oder konvexen Seite liegenden Fasern ausgedehnt, somit gezogen, dagegen die auf der oberen oder konkaven Seite liegenden verkürzt daher gedrückt.

Demnach wird man offenbar bei dem Uebergange von den gezogenen Fasern zu den gedrückten auf eine Faserschichte gelangen, deren Fasern weder gezogen noch gedrückt sein werden, die also trotz der Krümmung ihre ursprüngliche Länge beibehalten; man nennt deshalb diese Faserschichte die neutrale Schichte, ferner die Schnittlinie derselben mit irgend einer Querschnittsebene die neutrale Axe des Querschnittes und endlich die Schnittkurve der neutralen Faserschichte mit der Kraftebene die elastische Linie.

Von der neutralen Faserschichte aus nimmt die Verlängerung,

beziehungsweise Verkürzung gegen die äußersten Fasern allmählich zu und erreicht somit in den äußersten Fasern den größten Werth.

Ein Maß für die Verlängerung oder Verkürzung der Fasern ergibt sich durch die oben gemachte Annahme, daß Querschnitte, welche vor der Biegung senkrecht zur Längenaxe sind, dies auch nach der Biegung bleiben. Da nun die mit Hilfe dieser Voraussetzung gewonnenen Resultate mit der Wirklichkeit übereinstimmen, so kann die gemachte Annahme als zulässig erklärt werden.

B. Bestimmung der Spannungen in einem beliebigen Querschnitte.

Unter Spannung verstehen wir hierbei im Allgemeinen die Anspruchnahme eines Querschnittstheiles pro Flächeneinheit.

Zur Bestimmung derselben dient die folgende Betrachtung. Ein Träger A B, Fig. 108, der unter der Einwirkung beliebiger äußerer Kräfte $D_1$ $P_1$, $P_2$ ... im Gleichgewichte ist, werde durch eine beliebige Querschnittsfläche $\alpha\ \beta$ in zwei Fragmente A C und C B getheilt; die jedem Fragmente zukommenden äußeren Kräfte werden dann im Allgemeinen nicht im Gleichgewichte sein; jedes Fragment müßte sich daher in Bewegung setzen, wenn nicht statt des weggeschnittenen Theiles äußere Kräfte am Querschnitte hinzugefügt würden, welche jenen inneren Kräften gleich sind, die vor der Trennung im betreffenden Querschnitte durch die äußeren Kräfte hervorgerufen wurden.

Betrachten wir z. B. das Fragment A C und nehmen statt aller der auf dieses Fragment thätigen, äußeren Kräfte deren Mittelkraft, d. i. die dem Querschnitte C entsprechende, nach §. 8 zu bestimmende Transversalkraft V, Fig. 108 a in Rechnung, so findet man: daß für den weiteren Bestand des Gleichgewichtes an der Schnittfläche jeder einzelnen Längenfaser eine in die Längenrichtung derselben fallende äußere Kraft anzubringen ist, von gleicher Größe mit der Spannung, welche vorher in der Faser an dieser Stelle vorhanden war. Diese Spannungswiderstände der einzelnen Fasern können, wenn die Biegung — wie vorausgesetzt wurde — innerhalb der Elastizitätsgrenze bleibt, also sehr gering ist, als Horizontalkräfte angesehen werden.

Außer diesen die Faserspannungen ersetzenden Horizontalkräften muß aber offenbar in dem Querschnitte noch eine vertikal abwärts wirkende Kraft angebracht werden, welche der Transversalkraft V das Gleichgewicht hält, somit die Größe — V hat.



652365

In der Querschnittsfläche C ist also außer den Spannungswiderständen der Längenfasern noch ein Widerstand gegen die Verschiebung längs dieser Querschnittsfläche thätig, welcher mit der Transversalkraft V gleiche Größe und entgegengesetzte Richtung hat.

Um nun die im Querschnitte C thätigen Faserspannungen kennen zu lernen, berücksichtige man, daß durch die Biegung alle zwischen den unendlich nahen Normalschnitten C und $C_1$ liegenden, ursprünglich geraden und gleich langen Faserelemente derart gekrümmt wurden, daß sie nunmehr kleine Kreisbögen von verschiedener Länge bilden, welche den gemeinschaftlichen Mittelpunkt O besitzen.

Legt man, um die Verlängerungen oder Verkürzungen dieser Faserelemente kennen zu lernen, durch C zur Ebene $m_1$ $n_1$ die Parallele i k, so geben die zwischen C m und C i gelegenen Bogentheile die Verlängerungen, dagegen die zwischen C n und C k liegenden Stücke die Verkürzungen an, welche die einzelnen Faserelemente von der ursprünglichen Länge C $C_1$ in den verschiedenen Entfernungen von der neutralen Faserschichte durch die Biegung zu erleiden hatten.

Diese Ausdehnungen und Verkürzungen sind — wie sich aus der Figur ergibt — den Entfernungen von der neutralen Schichte C $C_1$ proportional und da nach dem Elastizitätsgesetze die Längenänderungen wider den Spannungen proportional sind, so verhalten sich also auch die Spannungen der einzelnen Fasern wie ihre Abstände von der neutralen Schichte.

Bezeichnet man daher mit s die Spannung der Fasern pro Flächeneinheit des Querschnittes in der Entfernung 1 von der neutralen Axe N $N_1$, so ist die Spannung in der Entfernung y von der neutralen Axe bestimmt durch s . y.

Um nun hiernach die Faserspannung an den verschiedenen Stellen des Querschnittes zu ermitteln, denken wir uns die Querschnittsfläche in unendlich schmale, zur neutralen Axe N $N_1$ parallele Streifen zerlegt; bezeichnen wir den Flächeninhalt eines dieser in der Entfernung y von der neutralen Axe liegenden Elementarstreifens mit f, so erhält man für die Spannung desselben den Ausdruck s . y . f.

Diese Spannung ist als eine **Zug**-Spannung oder **positive** Spannung anzusehen, wenn das betreffende Flächenelement **unterhalb**, dagegen als eine **Druck**-Spannung oder **negative** Spannung in Rechnung zu nehmen, wenn das Flächenelement f **oberhalb** der neutralen Axe liegt.

Soll sich nun das Fragment A C unter dem Einfluße aller der in der Querschnittsfläche C thätigen Horizontalspannungen im Gleichgewichte befinden, so muß — da diese Spannungen durch die Transversalkraft V nicht aufgehoben werden können — ihre algebraische Summe gleich Null sein; wir erhalten also, wenn wir das Summationszeichen $\Sigma$ einführen,

$$\Sigma\,(s \,.\, y \,.\, f) = 0,$$

oder weil die Größe s als gemeinschaftlicher Faktor aller der unter dem Summationszeichen vereinigten Glieder vor das Summationszeichen gesetzt und nicht Null werden kann, so muß die Gleichung bestehen:

$$\Sigma\,(y \,.\, f) = 0.$$

Da nun f . y das statische Moment eines Flächenelementes bezüglich der neutralen Axe N $N_1$ bezeichnet, so folgt aus der letzten Gleichung, daß die Momentensumme aller Flächenelemente des ganzen Querschnittes in Bezug auf die neutrale Axe gleich Null ist. Nach der Lehre vom Schwerpunkte kann man aber bekanntlich statt dieser Momentensumme der einzelnen Flächenelemente das Produkt aus der ganzen Querschnittsfläche in den Abstand ihres Schwerpunktes von jener Axe setzen, und da dieses Produkt gleich Null sein muß, so folgt hieraus, daß der Schwerpunkt der Querschnittsfläche in der neutralen Axe selbst liegt.

Die Gleichung $\Sigma\,(s \,.\, y \,.\, f) = 0$ lehrt also: daß die neutrale Axe durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche geht.

Damit aber auch das Fragment A C **im Gleichgewichte gegen Drehung** bleibe, muß bekanntlich die algebraische Summe der statischen Momente aller der auf das Fragment A C wirkenden Kräfte in Bezug auf irgend eine beliebige Axe, z. B. in Bezug auf die neutrale Axe des Querschnittes C gleich Null sein. Es muß also das statische Moment M der Transversalkraft V, welche das Fragment um C von links nach rechts zu drehen sucht, gleich sein der Summe der statischen Momente aller Spannungswiderstände der einzelnen Flächenelemente, deren jeder für sich allein eine von rechts nach links gerichtete Drehung hervorbringen würde.

Das statische Moment des Spannungswiderstandes des im Abstande y von der neutralen Faser liegenden Flächenelementes ist aber gleich

$$s \,.\, y \,.\, f \,.\, y \text{ oder } s \,.\, f \,.\, y^2;$$

es muß daher für den Gleichgewichtszustand die Gleichung bestehen

$$M = \Sigma\,(s \,.\, f \,.\, y^2),$$

oder da wieder s als gemeinschaftlicher Faktor aller der unter dem Summationszeichen vereinigten Glieder vor das Summationszeichen gesetzt werden kann,

$$M = s \, \Sigma (f \, . \, y^2).$$

In dieser Gleichung bedeutet $\Sigma (f \, . \, y^2)$ die Summe aller Produkte aus den einzelnen Flächenelementen der Querschnittsfläche in die Quadrate ihrer Abstände von der neutralen Axe oder das sogenannte Trägheitsmoment der Querschnittsfläche in Bezug auf die neutrale Axe. Bezeichnen wir es mit T, so wird behufs der Sicherung gegen Drehung

$$M = s \, . \, T.$$

Um nun statt s d. i. statt der Spannung der Fasern pro Flächeneinheit in der Entfernung 1 von der neutralen Axe einen praktisch brauchbaren Ausdruck einzuführen, berücksichtige man, daß in den äußersten Fasern, welche von der neutralen Axe am weitesten abstehen, die größte Spannung herrscht, daß also diese Maximalspannung, wenn der Träger nicht über die Elastizitätsgrenze beansprucht werden soll, einen gewissen von der Festigkeit oder Elastizität des Materiales abhängigen Werth nicht überschreiten darf, der somit für s als maßgebend anzusehen ist.

Bezeichnet man daher die Entfernungen der äußersten gezogenen und gedrückten Fasern von der neutralen Axe, beziehungsweise mit e und $e_1$ und die größte zulässige Zug- und Druck-Spannung dieser Fasern (pro Flächeneinheit) beziehungsweise mit k und $k_1$, so müssen — da die Faser-Spannungen mit der Entfernung von der neutralen Schichte in direktem Verhältnisse zunehmen — die Gleichungen bestehen:

$$\frac{s}{k} = \frac{1}{e} \text{ und } \frac{s}{k_1} = \frac{1}{e_1},$$

woraus

$$s = \frac{k}{e} \text{ oder } s = \frac{k_1}{e_1}.$$

Führen wir diese Werthe in der obigen Gleichung ein, so wird

$$M = \frac{k}{e} T \text{ oder } M = \frac{k_1}{e_1} T.$$

Man nennt den Ausdruck $\frac{k}{e} T$ oder $\frac{k_1}{e_1} T$ das Widerstandsmoment des Querschnittes und kann demnach sagen:

Behufs der Sicherung gegen Drehung muß das Widerstandsmoment des affizirten Querschnittes gleich sein dem Biegungs-Momente M der dem Querschnitte zugehörigen Transversalkraft V.

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$\frac{k}{e} = \frac{k_1}{e_1};$$

d. h. daß bei jedem rationell konstruirten Träger die Querschnittsform so anzuordnen ist, daß die größte zulässige Zug- und Druckspannung in den äußersten gezogenen, beziehungsweise gedrückten Fasern gleichzeitig herrscht.

Da nun beim Stahl, Schmiedeisen und Holz nahezu $k = k_1$ ist, so soll bei den aus einem dieser Materialien konstruirten Trägern die Querschnittsfläche durch die neutrale Axe in 2 kongruente Theile zerlegt werden.

Beim Gußeisen ist dagegen die Druckfestigkeit mindestens zweimal größer als die Zugfestigkeit, man wird daher für gußeiserne Träger den Querschnitt so anzuordnen haben, daß die äußersten gedrückten Fasern von der neutralen Axe wenigstens zweimal weiter abstehen als die äußersten gezogenen.

Da übrigens das Materiale zunächst der neutralen Schichte, am wenigsten dagegen in den von ihr am weitesten abstehenden Fasern am meisten in Anspruch genommen wird, so folgt daraus, daß bei rationell gebauten Trägern das Materiale (unter Erhaltung einer soliden Verbindung aller Querschnittstheile) möglichst weit von der neutralen Schichte anzubringen ist.

Wird in der Praxis die Gleichung $\frac{k}{e} = \frac{k_1}{e_1}$ stets berücksichtigt, so ist es offenbar gleichgiltig, ob man sich an die Gleichung $M = \frac{k}{e} T$ oder an jene $M = \frac{k_1}{e_1} T$ hält; gewöhnlich wird die erstere gewählt, weshalb wir sie auch beibehalten wollen.

C. Anwendung. Die Gleichung $M = \frac{k}{e} T$ ist für den Bau der auf Biegung in Anspruch genommenen Träger die wichtigste; denn sie

dient einerseits dazu, die Querschnitts-Dimensionen des zu konstruirenden Trägers zu berechnen, deren er an den einzelnen Stellen bedarf, um der gegebenen Belastung einen hinreichenden Widerstand entgegen zu setzen, oder sie bestimmt andererseits die Spannungen in den am meist gespannten Schichten eines gegebenen Trägers bei einer bestimmten Belastungsweise.

Was die erstere Anwendung betrifft, so hat man zu unterscheiden, ob der Träger einen konstanten oder einen veränderlichen Querschnitt zu bekommen hat.

Soll der Träger einen konstanten Querschnitt erhalten, was nur bei kurzen Trägern behufs der leichteren Herstellung zulässig ist, so ist es klar, daß der Querschnitt für jene Stelle des Trägers zu bestimmen ist, für welche das Biegungsmoment M der äußeren Kräfte ein Maximum wird, d. h. für den sogenannten Bruch- oder gefährlichen Querschnitt.

Bei langen Trägern würde man aber durch die Wahl eines konstanten Querschnittes nicht nur unnöthigerweise Materiale verschwenden, sondern dadurch überdies die Tragfähigkeit des Trägers beeinträchtigen.

Man wird daher langen Trägern einen veränderlichen Querschnitt geben, der dem jeweiligen — den verschiedenen Stellen des Trägers zukommenden — Momente M möglichst entspricht.

Ein solcher Träger hat offenbar durch seine ganze Länge gleiche Widerstandsfähigkeit und erfordert den geringsten Materialaufwand.

### D. Bestimmung des Widerstandsmomentes.

In der Gleichung $M = \frac{k}{e} T$ kommen vier verschiedene Größen vor; soll daher eine derselben bestimmt werden, so müssen die drei anderen gegeben sein.

Gewöhnlich ist die Länge $l$ des Trägers, das Materiale, aus welchem er hergestellt werden soll und das Belastungsgesetz desselben gegeben.

Aus der Länge $l$ und dem Belastungsgesetze läßt sich dann nach Früherem das jedem Querschnitte zukommende Moment M bestimmen.

Da aber auch k durch die Wahl des Materiales bedingt ist, ferner $l_1$ des Trägers und somit auch e von der Länge des Trägers
macht wird, so wird also gewöhnlich nur das Trägheits-
$\Sigma (f \cdot y^2)$ zu bestimmen sein, wobei im Allgemeinen die

Querschnittsform und die Höhe des Querschnittes gegeben ist, welche bei Trägern von konstanter Höhe $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{16}$ der Länge $l$ beträgt.

Die Trägheitsmomente der verschiedenen Querschnittsformen können entweder durch Rechnung oder auf graphischem Wege bestimmt werden.

Da jedoch die Berechnung des Trägheitsmomentes auf elementarem Wege, d. h. ohne Anwendung der sogenannten Differential- und Integralrechnung sehr umständlich ist und überdies die Trägheitsmomente der einfacheren Querschnittsformen in jedem Lehrbuche der Mechanik oder Festigkeitslehre zu finden sind, so wollen wir hier nur die graphische Methode anwenden und unter Einem auch das Widerstandsmoment $\frac{k}{e} T$ bestimmen.

Denkt man sich das Fragment A C, Fig. 108 a, durch die Transversalkraft V so weit gebogen, daß die Spannungen in den äußersten Fasern per Flächeneinheit gerade die größten noch zulässigen Werthe k und $k_1$ erreichen, und bestimmt dann die Resultanten R und $R_1$ der in dem Querschnitte m n thätigen horizontalen Zug- und Druckkräfte, sowie deren bezügliche Angriffspunkte O und $O_1$, die von einander um $\Delta$ abstehen mögen, so muß, wie bereits nachgewiesen wurde, für den Gleichgewichtszustand zunächst

$$R - R_1 = 0 \text{ oder } R = R_1,$$

und damit keine Drehung eintreten könne, die algebraische Summe der auf das Fragment A C wirkenden Kraftmomente bezüglich irgend eines in der Ebene dieser Kräfte gelegenen Punktes Null sein.

Wählen wir den Punkt $O_1$ als Drehpunkt, so muß also die Gleichung bestehen:

$$V \cdot a - R \cdot \overline{OO_1} = 0 \text{ oder } V \cdot a = R \cdot \overline{OO_1}.$$

Setzt man wieder $V \cdot a = M$ und statt $\overline{OO_1}$ den Werth $\Delta$, so wird

$$\mathbf{M = R \cdot \Delta}.$$

Es ist aber nach Früherem auch

$$M = \frac{k}{e} \cdot T,$$

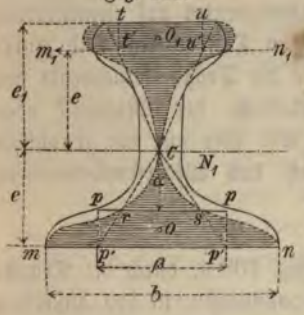
daher das Trägheitsmoment bestimmt durch

$$\mathbf{T = \frac{e}{k} \cdot R \cdot \Delta}.$$

Wir wollen nun hiernach das Widerstands- und Trägheitsmoment für den in Fig. 109 dargestellten Querschnitt ermitteln.

Ist b die Breite der untersten Faserschichte m n und die in derselben pro Flächeneinheit herrschende Spannung k, so ist der Spannungswiderstand der untersten Faserschichte gleich b . k; nimmt man überdies k als Maßstabseinheit für die Spannungswiderstände an, so repräsentirt dann bereits b den in der untersten Faserschichte herrschenden Widerstand.

Fig. 109.




Um nun den Widerstand z einer beliebigen Faserschichte p p zu bestimmen, welche von der neutralen Axe N $N_1$ um das Stück α absteht und die Breite β hat, so berücksichtige man, daß nach S. 102 die Spannung s (pro Flächeneinheit) in der Entfernung 1 von N $N_1$ gleich ist $\frac{k}{e}$ oder für k = 1, $s = \frac{1}{e}$; es wird somit der Widerstand in der fraglichen Schichte bestimmt sein durch $z = s \cdot \alpha \cdot \beta = \frac{\alpha \cdot \beta}{e}$.

z ist also die vierte Proportionale zu den drei Größen α, β, e und läßt sich leicht graphisch ermitteln.

Man projizire nämlich p p auf die Basis m n lothrecht herab und verbinde die Endpunkte p' und p' der Projektion mit dem Querschnittsmittelpunkte C, so schneiden diese Verbindungslinien auf p p den Widerstand $z = \overline{rs}$ ab; denn es ist das $\triangle$ C p' p' $\sim$ $\triangle$ C r s und da sich in ähnlichen Dreiecken die Grundlinien wie die zugehörigen Höhen verhalten, so ist $\beta : z = e : \alpha$, woraus wirklich $z = \frac{\alpha \cdot \beta}{e}$.

Analog bestimmt man die Widerstände der andern Faserschichten auf der ganzen unteren Querschnittshälfte, verbindet deren Endpunkte durch eine kontinuirliche Linie und schraffirt die zwischenliegende Fläche.

Denkt man sich nun die Fläche der schraffirten Figur C r m n s C
Spannung k der untersten Schichte, die als Maßeinheit gewählt
örmig in Anspruch genommen, oder mit anderen Worten:
t man den Flächeninhalt F der schraffirten

Figur CrmnsC mit k, so erhält man offenbar den totalen Zugswiderstand $R = F \cdot k$ der unteren Querschnittshälfte, dessen Angriffspunkt selbstverständlich in dem Schwerpunkte O dieser schraffirten Figur liegt, die wir mit Recht „die Widerstandsfläche mit konstanter Zugspannung" nennen können.

Auf dieselbe Weise bestimmt man den gesammten Druckwiderstand $R_1 = R$ des über der neutralen Axe N $N_1$ liegenden Querschnittstheiles, wobei man aber, wenn die oberste Faserschichte t u von N $N_1$ nicht denselben Abstand hat wie die unterste m n, die Reduktion der Widerstände der einzelnen Schichten bezüglich jener Schichte $m_1$ $n_1$ vornehmen muß, welche von N $N_1$ eben so weit absteht, als wie die unterste m n, deren Widerstand k pro Flächeneinheit als Maßeinheit angenommen wurde.

Wird jedoch der ganze Querschnitt durch die neutrale Axe N $N_1$ in zwei kongruente Hälften getheilt, so braucht man nur R zu bestimmen und den Angriffspunkt O nach $O_1$ symmetrisch zu N $N_1$ zu übertragen.

Hat man nun R sowie die Distanz $O\,O_1 = \triangle$ ermittelt, so ist nach Obigem das Widerstandsmoment des ganzen Querschnittes $\mathbf{M} = \mathbf{R} \cdot \triangle$ und das Trägheitsmoment $T = \frac{e}{k} R \cdot \triangle$, weil aber $R = F \cdot k$, so wird $\mathbf{T} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} \cdot \triangle$, wobei — wie schon bemerkt wurde — F den Flächeninhalt der unter der neutralen Axe N $N_1$ liegenden Widerstandsfläche mit konstanter Spannung k bedeutet.

---

Zusatz. Wir haben gesehen, daß es im vorliegenden — der Biegungselastizität geltenden — Paragraphe bei der Bestimmung des Trägheits- und Widerstandsmomentes immer darauf ankam, den Schwerpunkt einer unregelmäßigen ebenen Fläche zu bestimmen.

Wir wollen daher in Kürze zeigen, wie die Ermittlung desselben vorzunehmen ist, und unter Einem eine andere Bestimmungsweise des Trägheitsmomentes ebener Flächen mit Anwendung des Kräfte- und Seilpolygones damit verbinden.

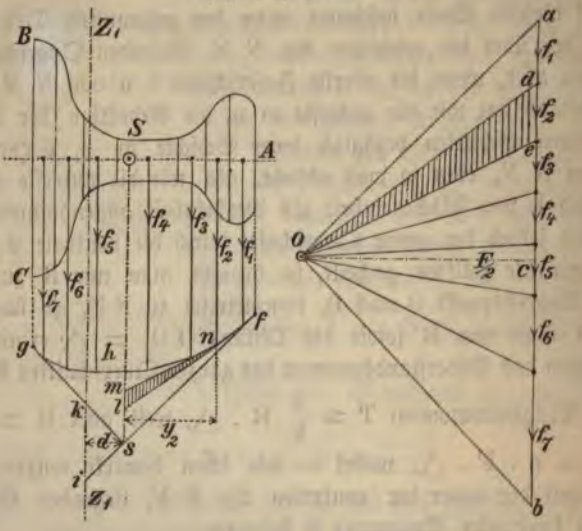
---

Graphische Bestimmung des Schwerpunktes und Trägheitsmomentes einer ebenen Fläche. Es sei A B C, Fig. 110, die gegebene Fläche vom Inhalte F, deren Schwerpunkt und Trägheits-

moment in Bezug auf eine zur Geraden $Z_1 Z_1$ parallele Schwerpunktsaxe bestimmt werden soll.

Man zerlege zunächst die Fläche A B C parallel zur Richtung $Z_1 Z_1$ in schmale Streifen $f_1$, $f_2$, $f_3$ . . . , deren Breite so gering gewählt

Fig. 110, 110 a.




wird, daß jeder Streifen nahezu als Trapez angesehen werden kann, dessen Fläche f also gleich ist dem Produkte aus der Breite in die mittlere Höhe desselben. Nun bilde man das den Elementen $f_1$, $f_2$, $f_3$ . . . entsprechende Kräfte- und Seilpolygon, Fig. 110 und 110 a, wobei man am zweckmäßigsten die Poldistanz $o\,c = \frac{F}{2}$ und den Pol o senkrecht zur Mitte c des Kräftepolygones a b wählt, so daß der Winkel a o b = 90 Grad wird.

Verlängert man nun im Seilpolygone die äußersten Polygonseiten bis zu ihrem Durchschnittspunkte s, so muß dann — nach §. 8 — die Resultirende aus $f_1$, $f_2$, $f_3$ . . . $f_7$, d. i. die Schwerlinie der ganzen durch s gehen und zu $Z_1 Z_1$ parallel sein. Wäre die Fläche A B C symmetrisch, so müßte man eine zweite Schwerlinie in Bezug auf dere, zu $Z_1 Z_1$ nicht parallele Richtungslinie $Z_2 Z_2$ suchen, und

würde dann im Schnittpunkte der beiden Schwerlinien den Schwerpunkt S erhalten. *)

Hat man die zu $Z_1 Z_1$ parallele Schwerlinie S s der Fläche A B C ermittelt und bezeichnet den Inhalt der Fläche f s g h f, welche von der Seilkurve und deren äußersten Tangenten f s und g s eingeschlossen wird, mit $F_1$, so ist — wie aus dem Nachfolgenden erhellet — das Trägheitsmoment T in Bezug auf die Schwerlinie S s bestimmt durch:

$$T = F \cdot F_1 \ldots (\alpha).$$

Ferner ist das Trägheitsmoment $T_1$ in Bezug auf die Axe $Z_1 Z_1$:

$$T_1 = F (F_1 + F_2) \ldots (\beta),$$

wenn $F_2$ die Fläche des von dieser Axe und den äußersten Polygonseiten eingeschlossenen Dreieckes i k s bedeutet.

Die Richtigkeit der beiden Gleichungen ergibt sich aus folgender Betrachtung.

Verlängert man zwei unmittelbar aufeinander folgende Polygonseiten, z. B. die 2. und 3. bis zum Schnitte mit der Schwerlinie S s, so entsteht hierdurch das Dreieck l m n, welches dem Dreiecke o d e im Kräftepolygone (wegen des Parallelismus der Seiten) ähnlich ist. Bezeichnet man ferner die Entfernungen der aufeinander folgenden Schwerlinien der Elementarstreifen $f_1$, $f_2$, $f_3 \ldots$, von S s mit $y_1$, $y_2$, $y_3 \ldots$, so wird — weil sich in ähnlichen Dreiecken die Grundlinien wie die zugehörigen Höhen verhalten — die Proportion bestehen müssen:

$$\frac{m\,l}{y_2} = \frac{d\,e}{o\,c},$$

oder wegen $d\,e = f_2$ und $o\,c = \frac{F}{2}$,

$$\frac{m\,l}{y_2} = \frac{f_2}{\frac{1}{2}F},$$

woraus

$$m\,l \cdot \frac{y_2}{2} = \frac{f_2 \cdot y_2^2}{F} = \triangle\, l\,m\,n \ldots (\gamma).$$

Denkt man sich nun in derselben Weise für die andern Ecken des Seilpolygones die dem Dreiecke l m n entsprechenden Dreiecke gebildet, so

*) Von komplizirten, unregelmäßigen Flächen erhält man den Schwerpunkt am raschesten durch Versuche. Man schneidet nämlich die unregelmäßige Fläche aus starkem Zeichnungs- oder Kartonpapier aus und findet zwei Schwerlinien durch Ausbalanciren auf einer scharfen Kante. Im Schnittpunkte derselben liegt dann der Schwerpunkt.

werden dieselben in ihrer Gesammtheit offenbar die von der Seilkurve und deren äußersten Tangenten eingeschlossene Fläche f s g h vom Inhalte $F_1$ geben, so daß also, nach ($\gamma$)

$$F_1 = \frac{1}{F} \Sigma f \cdot y^2.$$

Die Summe $\Sigma f \cdot y^2$ gibt aber das Trägheitsmoment der Fläche A B C in Bezug auf die Schweraxe S s; es wird demnach, der obigen Gleichung ($\alpha$) entsprechend, wirklich

$$T = \Sigma f \cdot y^2 = F \cdot F_1.$$

Da nun in Bezug auf eine Axe $Z_1 Z_1$, welche zur Schweraxe S s in der Entfernung d parallel lauft, bekanntlich $T_1 = T + F \cdot d^2$, so folgt aus der Aehnlichkeit des Dreieckes i k s mit jenem o a b:

$$\frac{i\,k}{d} = \frac{F}{\frac{1}{2}F} = 2, \text{ woraus } i\,k = 2\,d.$$

Die Fläche des Dreieckes i k s ist also gleich $d^2$, und daher — der Gleichung ($\beta$) entsprechend — wirklich

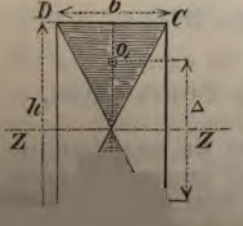
$$T_1 = F\,(F_1 + F_2).$$

Für Flächen, welche aus Rechtecken zusammengesetzt sind, deren Grundlinien zur Axe, auf welche das Trägheitsmoment bezogen wird, parallel laufen, lassen sich die Trägheitsmomente am genauesten und einfachsten durch Rechnung bestimmen.

Es ergibt sich nämlich zunächst für das Rechteck A B C D, Fig. 111, nach der Formel $T = e \cdot F \cdot \triangle$ (S. 107) das Trägheitsmoment für die Schweraxe Z Z durch

$$T = \frac{1}{12} b \cdot h^3 \ldots . \quad (1).$$

Fig. 111.

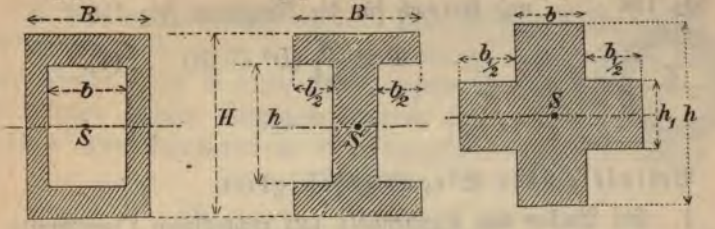



Mit Anwendung dieser Fundamentalformel können nun leicht die Trägheitsmomente für die folgenden Querschnitte ermittelt werden.

I. Die in Fig. 112 und 113 dargestellten Flächen kann man als Differenz der beiden Rechteckflächen B . H und b . h ansehen, weßhalb deren Trägheitsmoment bestimmt ist durch

$$T = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{12} \ldots (2).$$

Fig. 112. Fig. 113. Fig. 114.



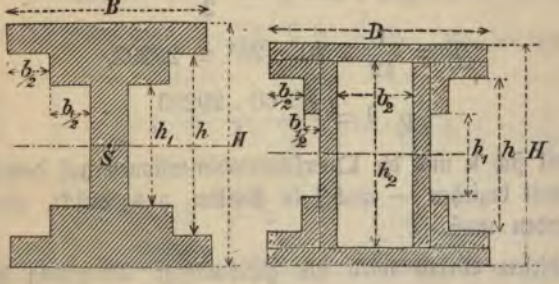

II. Für die Fläche Fig. 114, welche als Summe zweier Rechtecke vom Inhalte b . h und $b_1$ . $h_1$ betrachtet werden kann, ergibt sich

$$T = \frac{b \cdot h^3 + b_1 \cdot h_1^3}{12} \quad \ldots (3).$$

III. Für die durch Fig. 115 versinnlichte Fläche ergibt sich, wie leicht einzusehen ist,

$$T = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3 - b_1 \cdot h_1^3}{12} \quad \ldots (4).$$

Fig. 115. Fig. 116.

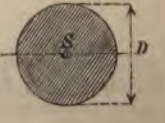



IV. Für die Fläche Fig. 116 ergibt sich analog

$$T = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3 - b_1 \cdot h_1^3 - b_2 \cdot h_2^3}{12} \quad \ldots (5).$$

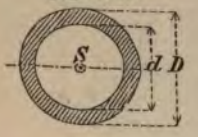
Auch für den **kreisrunden** Querschnitt, Fig. 117, erhält man das Trägheitsmoment am einfachsten durch Rechnung; es wird nämlich

Fig. 117.




$$T = \frac{\pi}{64} D^4 \quad \ldots (6),$$

Fig. 118.




und hiernach für die Ringfläche Fig. 118.

$$T = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \ldots (7).$$

---

### Beispiele über Biegungsfestigkeit.

1. Ein Balken von Tannenholz mit rechteckigem Querschnitte, der 20 Centim. breit, 26 Centim. hoch und 6 Meter lang, liegt an beiden Enden frei auf; welche gleichmäßig über die ganze Länge desselben vertheilte Last kann er mit 10facher Bruchsicherheit tragen?

Auflösung. Nach §. 11, S. 42, erreicht das Biegungsmoment M seinen größten Werth in der Mitte des Trägers, und zwar ist, wenn p die Belastung des Trägers pro Längeneinheit bedeutet:

$$\max M = \frac{p \cdot l^2}{8}.$$

Nach der Formel: $M = \frac{k}{e} \cdot T$, wird nun, weil bei 10facher Sicherheit $k = 60$ Kilogr., ferner $e = \frac{h}{2} = 13$ und

$$T = \frac{1}{12} \cdot 20 \cdot 26^3 \doteq 29293,$$

$$p \cdot l = \frac{8 \cdot 60 \cdot 29293}{l},$$

wobei — weil sich k und die Querschnittsdimensionen auf den Centimeter als Maßeinheit beziehen — auch l in Centim. ausgedrückt, also $l = 600$ eingesetzt werden muß.

Für diesen Werth wird die gleichmäßige Belastung des ganzen Balkens, d. i.

$$p \cdot l \doteq 1800 \text{ Kilogr.}$$

Das Eigengewicht G des Balkens wird, wenn 1 Kub.-Meter des Holzes mit 600 Kilogr. Gewicht angenommen wird,

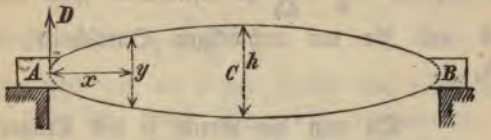
$$G = \frac{20 \cdot 26 \cdot 6}{10000} 500 = 156 \text{ Kilogr.}$$

Die Belastung, welche der Balken mit 10facher Sicherheit gegen Bruch tragen kann, ist also:

$$p \cdot l - G = 1644 \text{ Kilogr.}$$

2. Nach welchem Gesetze muß die Höhe h eines Balkens A B, Fig. 119, von der Mitte gegen die Enden abnehmen, wenn derselbe bei konstanter Breite b eine in seiner Mitte angebrachte Last P tragen, und an allen Stellen gleichen Biegungswiderstand haben, also ein sogenannter Balken von konstantem Biegungswiderstande werden soll.

Fig. 119.




Auflösung. Der in A oder B thätige Stützendruck ist hier offenbar $D = \frac{P}{2}$, daher das Biegungsmoment für die Mitte des Trägers: $M_1 = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2}$; dagegen für einen beliebigen Querschnitt in der Entfernung x von A, $M = \frac{P}{2} \cdot x$.

Da nun allgemein $M = \frac{k}{e} T$ und für den rechteckigen Querschnitt im vorliegenden Falle $e = \frac{y}{2}$ und $T = \frac{1}{12} b \cdot y^3$, so wird $M : M_1$ oder

$$\frac{P}{2} \cdot x : \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{6} k \cdot b \cdot y^2 : \frac{1}{6} k \cdot b \cdot h^2; \text{ d. i. } x : \frac{l}{2} = y^2 : h^2,$$

woraus

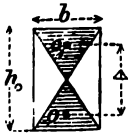
$$y^2 = \frac{2h^2}{l} x \quad \ldots \quad (\alpha).$$

Dies ist aber die Scheitelgleichung einer Parabel mit dem Scheitelpunkt A, deren Parameter gleich ist $\frac{2h^2}{l}$. Der Träger von konstantem Biegungswiderstande müßte also in diesem Falle im Aufrisse von zwei Parabeln begrenzt werden, deren Scheitelpunkte in den Stützpunkten liegen und deren gemeinschaftliche Ordinate h ist. Diese Ordinate ist aber zu bestimmen aus:

$\frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{6} k \cdot b \cdot h^2$, nämlich durch $h = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{6 P \cdot l}{b \cdot k}}$, und läßt sich dann die Konstruktion der beiden Parabeln auf bekannte Weise sehr leicht ausführen.

Für $x = 0$ würde aber nach der Gleichung ($\alpha$) auch $y = 0$, daher der Querschnitt über dem Stützpunkt gleich Null. Da jedoch in diesem Querschnitte der Stützendruck $\frac{P}{2}$ als Schubkraft wirkt, so ist, wenn die Höhe des rechteckigen Querschnittes in A oder B mit $h_0$ bezeichnet wird, dieselbe nach der Formel: $b_0 = \frac{V}{\sigma \cdot \Delta}$ zu bestimmen *), in welcher $V = \frac{P}{2}$, $\sigma = 0{,}6\ k$ und für den rechteckigen Querschnitt, nach Fig. 120, $\Delta = 2/3\ h_0$.

Fig. 120.




Da nun die Breite b des Trägers konstant, also $b_0 = b$ ist, so haben wir zur Bestimmung von $h_0$ die Gleichung:

$$b = \frac{\frac{1}{2} P}{0{,}6\ k \cdot 2/3\ h_0},$$

woraus

$$h_0 = \frac{P}{0{,}8\ b \cdot k}.$$

Anmerkung. Ist der Balken A B gleichmäßig mit p pro Längeneinheit belastet, so wird bekanntlich das Moment für die Mitte des Trägers $M_1 = \frac{p \cdot l^2}{8}$, und für einen beliebigen Querschnittt in der Entfernung x von A, nach S. 42,

$$M = \frac{p \cdot l}{2} x - \frac{p \cdot x^2}{2} = \frac{p}{2} x\ (l - x).$$

Es wird daher mit Berücksichtigung der Gleichung:

$$M = \frac{k}{e} \cdot T, \text{ wegen } e = \frac{y}{2} \text{ und } T = \frac{1}{12} b\ y^3,$$

$$M : M_1, \text{ oder}$$

$$\frac{p}{2} x\ (l - x) : \frac{p \cdot l^2}{8} = y^2 : h^2,$$

woraus zur Bestimmung von y die Gleichung resultirt:

$$y = \frac{2\ h}{l} \sqrt{x\ (l - x)}.$$

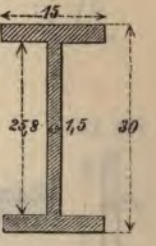
*) Die Ableitung dieser Formel findet man in meiner Baumechanik, 2. Theil S. 78.

Dieser Gleichung entspricht eine Ellipse, deren große Axe $AB = l$, und deren kleine Axe $k$ aus der Gleichung $\frac{p \cdot l^2}{8} = \frac{1}{6} k \cdot b \cdot h^2$, nämlich durch $h = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{3p}{b \cdot k}}$ bestimmt ist.

Für die Höhe $h_0$ der Querschnitte über den Stützen ergibt sich auf analoge Art wie oben $h_0 = \frac{p \cdot l}{0{,}8\ b \cdot k}$.

3. Wie lang wird der an beiden Enden frei aufliegende schmiedeiserne Träger, von der durch Fig. 121 bestimmten Querschnittsform, werden dürfen, wenn die Belastung desselben, mit Einschluß des Eigengewichtes, pro laufenden Meter 1000 Kilogramme und die größte zulässige Spannung der Fasern 600 Kilogramm pro □cm betragen soll?

Fig. 121.




Auflösung: Die unbekannte Länge $l$ des Trägers wird offenbar aus der Formel $\max M = \frac{p \cdot l^2}{8} = \frac{k}{e} T$ zu bestimmen sein, in welcher $p = 1000$, $k = 600$, $e = \frac{30}{2} = 15$, und nach der Formel (3)

$$T = \frac{15 \cdot 30^3 - 13{,}5 \cdot 25{,}8^3}{12} = 14429.$$

Für diese Werthe wird also

$$\frac{1000\ l^2}{8} = \frac{600}{15}\ 14429,$$

und hieraus $l = 679^{cm}$, oder genau genug

$$l = 6{,}8 \text{ Meter}.$$

---

## §. 31.

## Knickfestigkeit.

Wenn die Länge $L$ eines auf Druckfestigkeit in Anspruch genommenen Stabes A B, Fig. 122, so groß wird, daß sie die mittlere Querschnittsdimension D um das 5 bis 10fache bedeutend überschreitet, so erfolgt bei fortgesetzter axialer Belastung des Stabes kein eigentliches Zer-

Im vorliegenden Falle ist $k = 200$, $F = \frac{d^2\pi}{4} = 78{,}54$ □cm, $T = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = 490{,}875$, $C = 0{,}00027$ und $L = 600$cm. Für diese Werthe ergibt sich aus ($\gamma$)

$$P \doteq 5440 \text{ Kilogr.};$$

während sich für $k_1 = 800$ aus ($\delta$)

$$P \doteq 12855 \text{ Kilogramm}$$

ergeben würde, weshalb als zulässige Belastung der kleinere Werth, nämlich $P = 5440$ Kilogr., zu wählen wäre.

Im Mittel kann man sich bezüglich der Koefficienten C, k und $k_1$ an die nachstehende Tabelle halten:

| Materiale | C | k in Kilogrm. pr. □cm | $k_1$ in Kilogrm. pr. □cm |
|---|---|---|---|
| Gewöhnlicher Stahl . . . . . | 0,00009 | 1000 | 1000 |
| Schmiedeisen . . . . . | 0,00009 | 600 | 600 |
| Gußeisen . . . . . | 0,00027 | 200 | 800 |
| Holz . . . . . | 0,00022 | 60 | 50 |

Hiernach wird z. B. für eine quadratische hölzerne Säule mit der Dicke D, da $F = D^2$, und $T = \frac{1}{12} D^4$, die zulässige Tragkraft in Kilogr. nach $\beta$) bestimmt durch:

$$P = \frac{50\ D^4}{D^2 + 0{,}00264\ L^2},$$

wobei D und L in Centimetern ausgedrückt sein müssen.

Für $\frac{L}{D} = 1;\ 10;\ 20;\ 30;\ 40;\ 50;\ 100;$

wird $\frac{P}{D^2} = 50,\ 39{,}65;\ 24{,}45;\ 14{,}95;\ 9{,}65;\ 6{,}65;\ 1{,}85$ Kilogr.

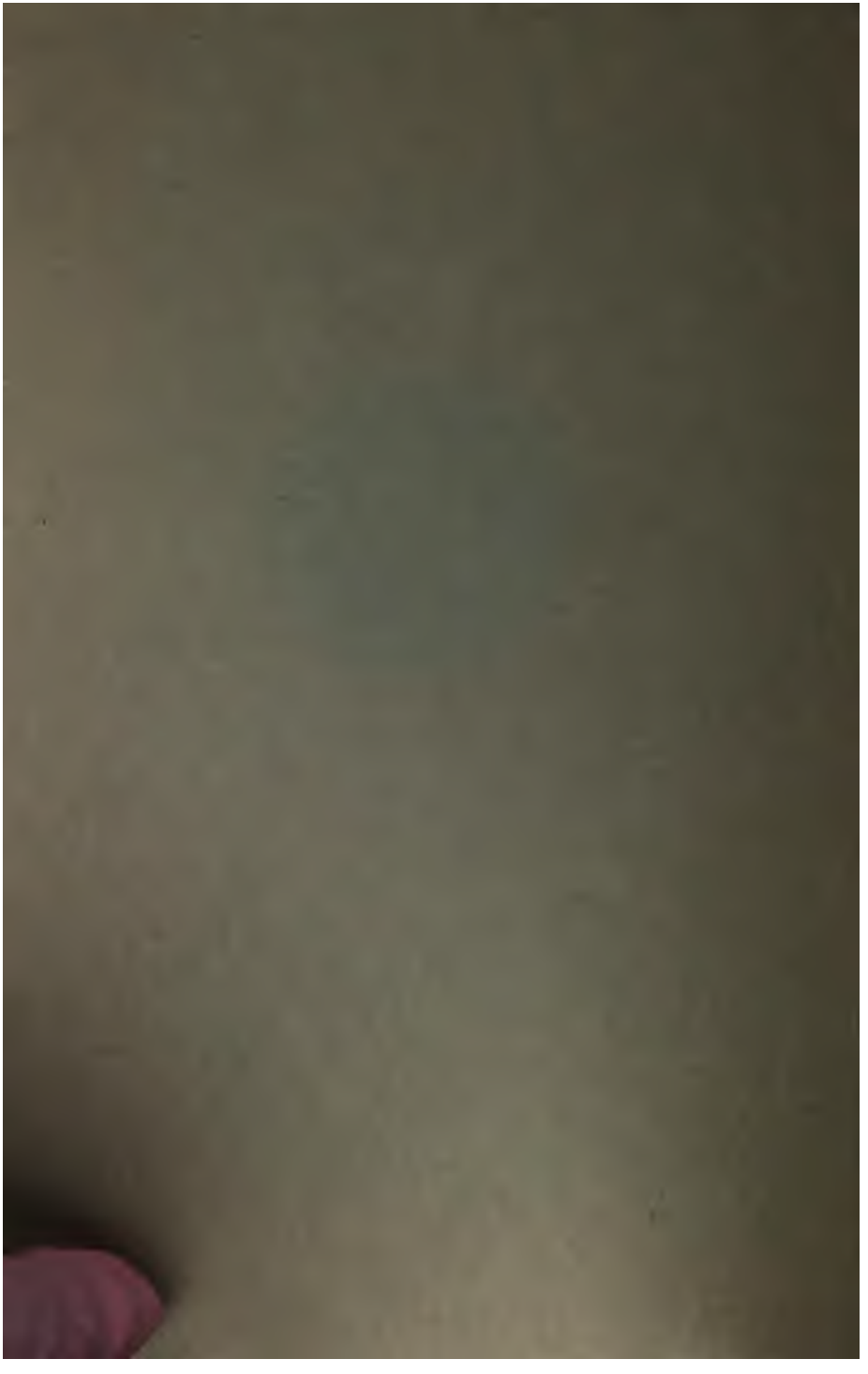
---

Die Formeln ($\alpha$) und ($\beta$) beziehen sich, wie schon bemerkt wurde, auf Stäbe mit freien oder um Scharniere drehbaren Enden; sind dagegen die beiden Enden der Stäbe befestigt, so ist die Tragfähigkeit oder zulässige Belastung dieser Stäbe bestimmt durch

$$P = \frac{4\,k\,.\,F\,.\,T}{C\,.\,F\,.\,L^2 - 4\,T} \cdots\cdots (\gamma),$$

oder durch

$$P = \frac{4\,k_1\,.\,F\,.\,T}{4\,T + C\,.\,F\,.\,L_2} \cdots\cdots (\delta).$$

Bei Stäben aus Stahl, Schmiedeisen und Holz ist wieder nur die Formel ($\delta$) maßgebend, während für gußeiserne Stäbe P nach beiden Formeln zu rechnen und der kleinere Werth von P als die zulässige Belastung anzunehmen ist.

Beispiel. Welche Tragfähigkeit wird eine gußeiserne, cilindrische Säule von 6 Meter Länge und 10 Centimeter Durchmesser erhalten wenn sie an beiden Enden befestigt ist?